

Comportement asymptotique des fonctions

Exemple introductif

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

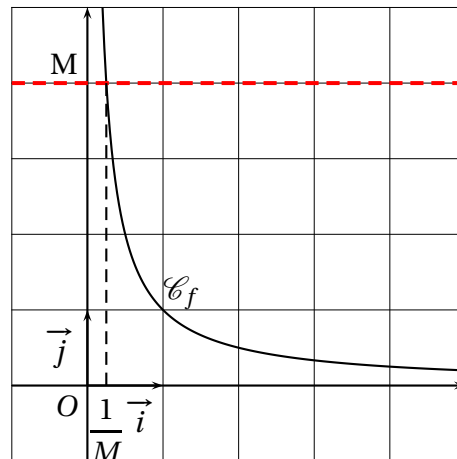
- Quels sont les nombres x tels que $f(x) \geq 10$?
- Quels sont les nombres x tels que $f(x) \geq 10^9$?
- Soit $M > 0$. Quels sont les nombres x tels que $f(x) \geq M$?

Réponses :

- $f(x) \geq 10 \Leftrightarrow \frac{1}{x} \geq 10 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \leq \frac{1}{10} \end{cases} f(x) \geq 10 \text{ pour } x \in \left]0; \frac{1}{10}\right]$.
- De même : $f(x) \geq 10^9$ pour $x \in \left]0; \frac{1}{10^9}\right]$
- Plus généralement : $f(x) \geq M$ pour $x \in \left]0; \frac{1}{M}\right]$

On constate que $f(x)$ peut prendre des valeurs aussi grandes que l'on veut ; pour n'importe quelle valeur de M **aussi grande que l'on veut**, il existe un intervalle $]0; \alpha[$ dans lequel $f(x) \geq M$.

On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$, pour x suffisamment proche de 0 ($x > 0$).



I Limite infinie en un réel a

Définition :

On dit que x tend vers $+\infty$ si, pour tout nombre $M > 0$, x prend des valeurs supérieures à M .

a est un nombre réel, borne d'un intervalle ouvert contenu dans l'ensemble de définition \mathcal{D}_f d'une fonction et f n'est pas définie en a .

1 Définition

$f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers un réel a signifie que $f(x)$ peut prendre des valeurs aussi grandes que l'on veut, dès que x est suffisamment proche de a .

On écrit : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.

On définit de même « $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers a » en appliquant la définition précédente à $-f(x)$:
 $f(x)$ tend vers $-\infty$ si $-f(x)$ tend vers $+\infty$.

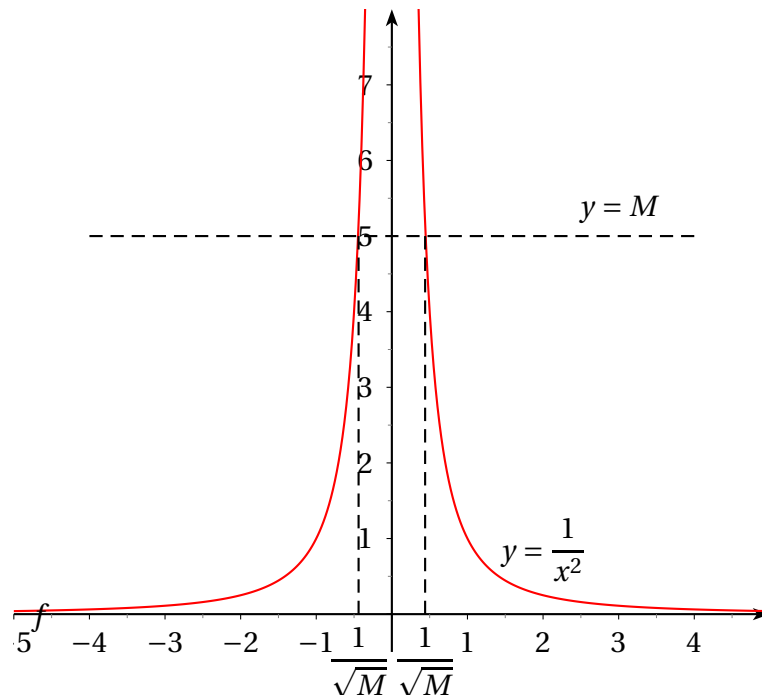
Écriture : on écrit : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

Exemples :

1. $f(x) = \frac{1}{x^2}$ au voisinage de 0 : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

En effet : soit $M > 0$; pour $x \neq 0$, $\frac{1}{x^2} > M \Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{M}$ (car ce sont deux nombres positifs).

on en déduit : $x \in \left] -\frac{1}{\sqrt{M}} ; 0 \right[\cup \left] 0 ; \frac{1}{\sqrt{M}} \right[$.



2. $f(x) = \frac{1}{x}$ au voisinage de 0 : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(\frac{1}{x} \right) = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{1}{x} \right) = +\infty$.

Le graphique est l'hyperbole habituelle, étudiée en seconde.

Ainsi peut-on être amené à distinguer limite à gauche et limite à droite.

2 Limites usuelles

Propriété :

(a) Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \frac{1}{x^{2n}}$ (n entier positif) ont pour limite $+\infty$ en 0.

(b) Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \frac{1}{x^3}$, $x \mapsto \frac{1}{x^{2n+1}}$ (n entier positif) ont pour limite $-\infty$ à gauche en 0 et $+\infty$ à droite en 0.

3 Asymptote verticale

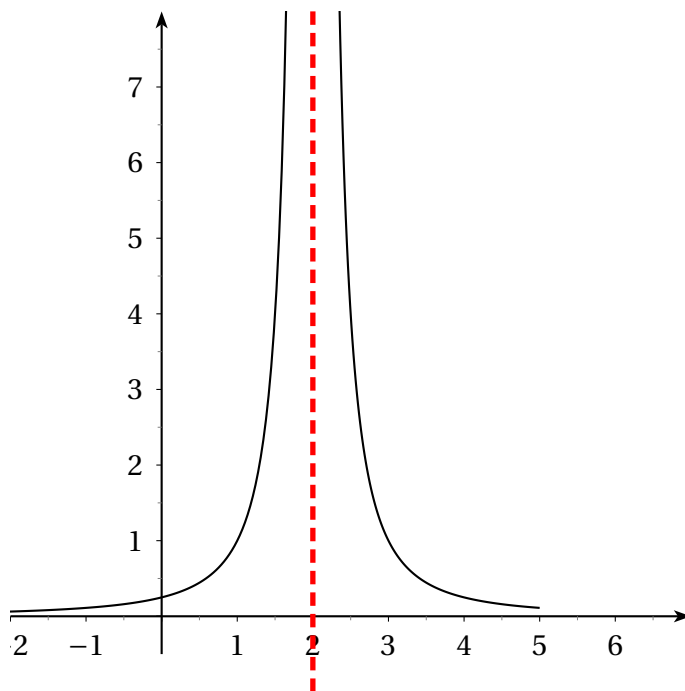
Définition :

Lorsque $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$, on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote à la courbe \mathcal{C}_f .

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par : $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$.

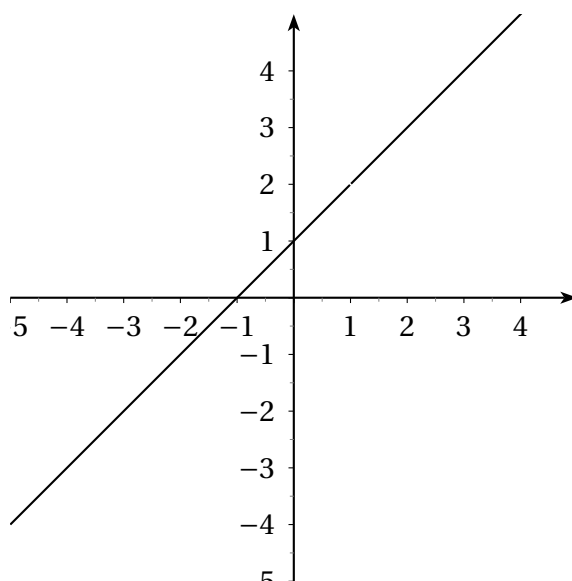
$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = 2$ est asymptote à la courbe \mathcal{C}_f .



Remarque : il ne suffit pas que f ne soit pas définie en a : par exemple, la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

n'est pas définie en 1, mais $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ (car, pour $x \neq 1$, $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1} = x + 1$ donc la courbe \mathcal{C}_f pas d'asymptote verticale en 1.

En fait, quand on trace la courbe, on ne voit pas qu'elle n'est pas définie en 1 (il ne manque qu'un point à la courbe!)



II Limite finie à l'infini

1 Définition

$f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers $+\infty$ signifie que $f(x)$ peut prendre des valeurs aussi proches de ℓ que l'on veut, dès que x est suffisamment grand.

On écrit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$.

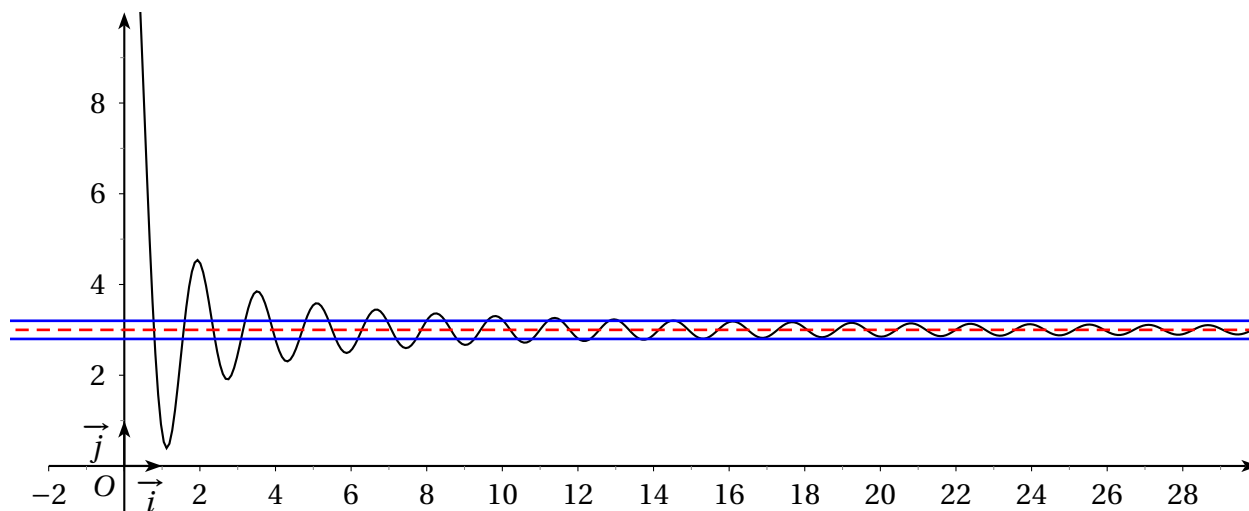
On définit de même « $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers $-\infty$ » en appliquant la définition précédente à $-f(x)$.

Écriture : on écrit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$.

Graphiquement, cela signifie que \mathcal{C}_f est entièrement dans la bande centrée sur ℓ et de largeur 2α ($\alpha > 0$ **quelconque**), pour x suffisamment grand. (voir exemple ci-dessous)

Illustration graphique :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 3 + 3 \frac{\sin(4x)}{x}$. On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$.



Remarque : plus on choisit α petit, plus x doit être grand (ou petit) pour que $f(x)$ soit dans la bande centrée autour de ℓ de largeur 2α .

2 Limites usuelles

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad (n \text{ entier naturel positif}).$$

3 Asymptote horizontale

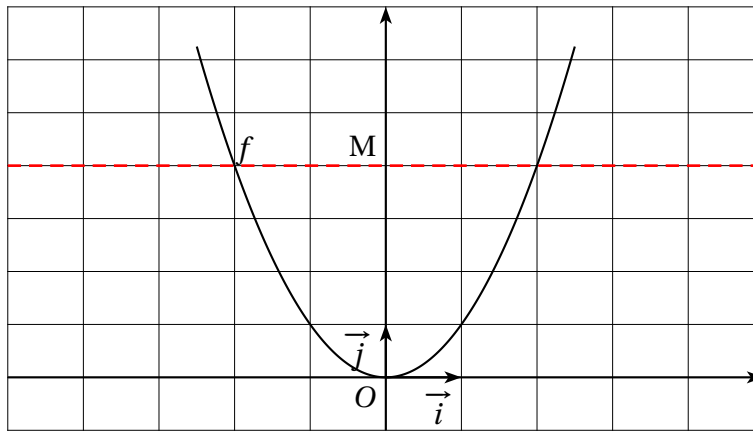
Lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$, on dit que la droite d'équation $y = \ell$ est asymptote à la courbe \mathcal{C}_f au voisinage de $+\infty$ ou au voisinage de $-\infty$.

III Limite infinie à l'infini

1 Définition

On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ si $f(x)$ peut prendre des valeurs aussi grandes que l'on veut pour x suffisamment grand.

Exemple : $f(x) = x^2$ dont la courbe est la parabole (étudiée en seconde).



Remarque : on peut tendre facilement cette définition à une limite égale à $-\infty$ au voisinage de $+\infty$ ou une limite égale à $-\infty$ au voisinage de $-\infty$ ou de $+\infty$ (en appliquant la définition précédente à $-f(x)$ et/ou avec $-x$).

2 Asymptote oblique

Il y a plusieurs façons pour une fonction de tendre vers $+\infty$ à l'infini. Nous allons étudier le cas où la courbe \mathcal{C}_f se rapproche de plus en plus d'une droite oblique au voisinage de $-\infty$ ou de $+\infty$.

Définition :

La droite d'équation \mathcal{D} d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe \mathcal{C}_f au voisinage de $-\infty$ et/ou de $+\infty$ si la limite en $-\infty$ ou en $+\infty$ de $[f(x) - (ax + b)]$ existe et si $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ et /ou $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.

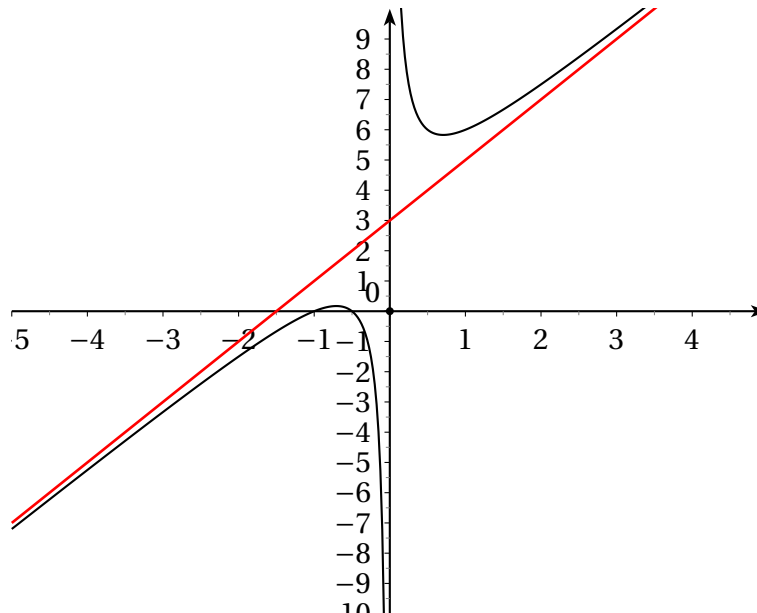
Exemple : $f(x) = 2x + 3 + \frac{1}{x}$.

Pour tout x , on a : $f(x) - (2x + 3) = \frac{1}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Par conséquent : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (2x + 3)] = 0$.

La droite d'équation $y = 2x + 3$ est asymptote à la courbe \mathcal{C}_f en $-\infty$ et en $+\infty$.

Graphiquement, on obtient :



IV Limites et opérations algébriques

Théorème admis :

Lorsqu'elle existe, la limite d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de deux fonctions est la somme, le produit ou le quotient des limites.

Les règles de calculs sur les limites sont résumées dans les trois tableaux ci-dessous :

a désigne un nombre réel, ou $-\infty$ ou $+\infty$.

ℓ et ℓ' désignent des nombres réels.

Addition ou soustraction

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors, $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) =$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

Produit

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$	ℓ	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) =$	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
alors, $\lim_{x \rightarrow a} (f \times g)(x) =$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

Quotient

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) =$	ℓ'	$\pm\infty$	0	ℓ'	$\pm\infty$	0	0	$\pm\infty$
alors, $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) =$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	Forme indéterminée	Forme indéterminée

Remarque :

On parle de **forme indéterminée** lorsque l'on ne peut pas répondre **directement**, à partir du formulaire.

Le « jeu » consiste alors à regarder de plus près les fonctions pour « lever » l'indétermination et trouver tout de même la limite cherchée.

Les techniques pour lever les indéterminations seront vues dans le paragraphe suivant.

Les quatre formes indéterminées sont :

- « $\infty - \infty$ »
- « $0 \times \infty$ »
- « $\frac{0}{0}$ »
- « $\frac{\infty}{\infty}$ »

V Comment lever une indétermination ?

Quand on cherche une limite et que l'on arrive à une forme indéterminée, on cherche à « lever cette indétermination. ».

Plusieurs techniques sont à connaître :

1 Utilisation de la forme conjuguée

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x}}$.

On cherche la limite au voisinage de $+\infty$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+2} = +\infty$ donc on a une forme indéterminée au dénominateur du type « $\infty - \infty$ ».

On transforme alors l'expression de $f(x)$, en multipliant numérateur et dénominateur par la forme conjuguée du dénominateur :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+2}}{[\sqrt{x+2} - \sqrt{x}][\sqrt{x+2} + \sqrt{x}]} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}^2 - \sqrt{x}^2} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+2}}{2}.$$

Alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x+2} + \sqrt{x}] = +\infty$ d'où : $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$.

2 Limite d'un polynôme à l'infini

Définition :

On appelle fonction polynôme de degré n une fonction du type : $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ (somme de puissances de x affectées de coefficients réels).

Exemple : $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 7x + 8$ est une fonction polynôme de degré 4.

Dans le cas où le calcul de la limite à l'infini d'un polynôme donne une forme indéterminée, on factorise celui-ci par son terme de plus haut degré.

Exemple :

Soit $f(x) = 4x^3 - x^2 + 5x - 8$. Les règles de calcul direct de la limite en $+\infty$ donnent une forme indéterminée. Pour $x > 0$ (possible, puisque l'on regarde ce qui se passe pour x suffisamment grand), on a :

$$f(x) = x^3 \left(4 - \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2} - \frac{8}{x^3} \right).$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x^2} = 0; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{x^3} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(4 - \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2} - \frac{8}{x^3} \right) = 4.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$, on obtient : $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$.

3 Limite d'une fraction rationnelle à l'infini

Définition :

On appelle fraction rationnelle le quotient de deux polynômes.

On adapte la méthode précédente, puisque dans une fraction rationnelle, le numérateur et le dénominateur sont tous deux des polynômes.

Au numérateur, on factorise pas la puissance la plus grande et de même au dénominateur, puis, on simplifie les deux puissances factorisées.

Exemple

Trouver la limite en $+\infty$ de $f(x) = \frac{3x^2 + 5x - 1}{x^3 + 2x}$.

Au numérateur, on factorise par le terme de plus haut degré et de même pour le dénominateur et l'on simplifie le quotient des puissances de x que l'on a factorisées.

$$\text{On trouve, pour } x > 0 : f(x) = \frac{x^2 \left(3 + \frac{5}{x} - \frac{1}{x^2} \right)}{x^3 \left(1 + \frac{2}{x^2} \right)} = \frac{3 + \frac{5}{x} - \frac{1}{x^2}}{x \left(1 + \frac{2}{x^2} \right)}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{5}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = 3; \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x^2} \right) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ d'où, par quotient : } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0}.$$

Exemple

$$\text{Soit } f(x) = \frac{x^3 + 5x - 1}{2x^3 + x + 1}.$$

$$\text{Pour } x \neq 0, f(x) = \frac{x^3 \left(1 + \frac{5}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)}{x^3 \left(2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)} = \frac{1 + \frac{5}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{5}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = 2, \text{ d'où } : \boxed{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{1}{2}}.$$

4 Exercice

$$\text{Soit } f \text{ la fonction définie par : } f(x) = \frac{2x^2 + 7x + 7}{x + 2}$$

1. Donner l'ensemble de définition \mathcal{D} de f .
2. Trouver trois nombres a , b et c tels que, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$.
3. Étudier les limites de f en $-\infty$, $+\infty$ et en -2 .
4. Montrer que la courbe \mathcal{C}_f admet une asymptote verticale dont on donnera l'équation.
5. Montrer que la courbe \mathcal{C}_f admet une asymptote oblique dont on donnera l'équation.
6. Étudier les variations de f sur \mathcal{D} et donner son tableau de variations.
7. Tracer \mathcal{C}_f .

Solutions :

$$1. \mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

$$2. \text{ Pour tout } x \in \mathcal{D}, \text{ on doit avoir } f(x) = \frac{2x^2 + 7x + 7}{x + 2} = ax + b + \frac{c}{x + 2}.$$

On met au même dénominateur :

$$ax + b + \frac{c}{x + 2} = \frac{(ax + b)(x + 2) + c}{x + 2} = \frac{ax^2 + 2ax + bx + 2b + c}{x + 2} = \frac{ax^2 + (2a + b)x + 2b + c}{x + 2}.$$

Pour que les deux expressions soient égales, il faut que les coefficients des polynômes du numérateur soient les mêmes.

On obtient un système :

$$\begin{cases} a = 2 \\ 2a + b = 7 \\ 2b + c = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 7 - 2a = 3 \\ c = 7 - 2b = 1 \end{cases}.$$

$$\text{Par conséquent : } \boxed{f(x) = 2x + 3 + \frac{1}{x + 2}}$$

3. Pour calculer les limites en $-\infty$ ou en $+\infty$, on peut utiliser les techniques vues pour une fraction rationnelle ou partir de la forme ci-dessus.

$$f(x) = 2x + 3 + \frac{1}{x + 2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 3) = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 2) = -\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x + 2}\right) = 0.$$

$$\text{Par somme : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 3) = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2) = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x + 2}\right) = 0.$$

$$\text{Par somme : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} (2x + 3) = 2 \times (-2) + 3 = -4 + 3 = -1.$$

Pour la limite en -2 de $\frac{1}{x + 2}$, il faut distinguer deux cas, selon la position de x par rapport à -2 .

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} (x+2) = 0 \text{ (avec } x+2 < 0) \text{ donc } \lim_{x < -2} \left(\frac{1}{x+2} \right) = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} (x+2) = 0 \text{ (avec } x+2 > 0) \text{ donc } \lim_{x > -2} \left(\frac{1}{x+2} \right) = +\infty$$

On en déduit : $\lim_{x < -2} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x > -2} f(x) = +\infty$.

4. Pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(x) = 2x + 3 + \frac{1}{x+2}$ (fonction affine, plus un terme complémentaire).

On a : $f(x) - (2x + 3) = \frac{1}{x+2}$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{x+2} \right) = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (2x + 3)] = 0$.

La droite d'équation $y = 2x + 3$ est donc asymptote à \mathcal{C}_f en $-\infty$ et en $+\infty$.

5. f est dérivable sur \mathcal{D} comme somme et quotient de fonctions dérivables.

$$f(x) = 2x + 3 + \frac{1}{x+2}; f = u + \frac{1}{v} \text{ avec } u(x) = 2x + 3 \text{ et } v(x) = x + 2.$$

$$f' = u' + \left(\frac{1}{v} \right)' = u' - \frac{v'}{v^2} \text{ avec } u'(x) = 2 \text{ et } v'(x) = 1. \text{ Par conséquent : } f'(x) = 2 - \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{2(x+2)^2 - 1}{(x+2)^2} =$$

$$\frac{2(x^2 + 4x + 4) - 1}{(x+2)^2} = \frac{2x^2 + 8x + 7}{(x+2)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 8x + 7 = 0.$$

$$\Delta = 8^2 - 4 \times 2 \times 7 = 64 - 56 = 8 > 0.$$

Il y a deux racines :

$$x_1 = \frac{-8 - \sqrt{8}}{4} = \frac{-8 - 2\sqrt{2}}{4} = \frac{2(-4 - \sqrt{2})}{2 \times 2} = \frac{-4 - \sqrt{2}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-4 + \sqrt{2}}{2}.$$

$f'(x)$ est du signe du numérateur ; $2x^2 + 8x + 7$ est de la forme $ax^2 + bx + c$, donc positif (du signe du coefficient de x^2 , 2) à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines et négatif entre les racines.

$$x_1 \approx -2,7 \text{ et } x_2 \approx -1,3$$

On en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$	x_1	-2	x_2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$f(x_1)$	$-\infty$	$f(x_2)$	$+\infty$

6. Courbe :

