Correction du contrôle commun

EXERCICE I

1. Le prix d'un produit est passé de 200 € à 100 €. Le taux d'évolution global est $\dfrac{100-200}{200} = -\dfrac{1}{2} = -0,5 = \boxed{-50\,\%}$.

   Si t est le taux de chaque baisse, on a $(1+t)^2 = 1 - \dfrac{50}{100} = 0,5$ donc $1+t = \sqrt{0,5}$ d'où $t = \sqrt{0,5} - 1$

   $\approx -0,29 \approx \boxed{-29\,\%}$. 1 pt
2. Pour une puissance électrique donnée, le tarif réglementé du kilowatt-heure est passé de 0,114 0 € au 01/07/2007 à 0,137 2 € au 01/07/2014.

   Le coefficient multiplicateur global est $C = \dfrac{0,1372}{0,1140} \approx \boxed{1,20350}$.

   Si t est le taux fixe d'augmentation annuel, on doit avoir $(1+t)^7 \approx 0,00012$.

   On a $\left(1+\dfrac{1,72}{100}\right)^7 = 1,0172^7 \approx 1,63$; $\left(1+\dfrac{1,67}{100}\right)^7 = 1,0167^7 \approx 1,123$; $\left(1+\dfrac{2,68}{100}\right)^7 = 1,0268^7 \approx 1,203$ et $\left(1+\dfrac{1,33}{100}\right)^7 = 1,0133^7 \approx 1,097$ donc la bonne réponse est $\boxed{2,68\,\%}$. 1 pt
3. Le prix d'une action a augmenté chaque mois de 5 % et cela pendant 3 mois consécutifs.
   Le coefficient multiplicateur mensuel est $C = 1,05$ donc le coefficient multiplicateur global est
   $C^3 = 1,05^3 = \boxed{1,157625}$ qui vaut à peu près 1,15. 1 pt
4. Si le prix du baril de pétrole augmente une première fois de 50 % puis une seconde fois de nouveau de 50 % , alors le prix du baril a été multiplié par $1,5^2 = 2,25 = 1 + \dfrac{125}{100}$; il a donc augmenté de $\boxed{125\,\%}$. 1 pt
5. Après deux augmentations successives de 12 % puis de 8 % , le prix d'un article ménager est de 665,28 €.
   Le coefficient multiplicateur correspondant est $1,12 \times 1,08 = \boxed{1,2096}$.

   Le prix initial était donc de $\dfrac{665,28}{1,2096} = \boxed{550}$, donc moins de 555. 2 pt

EXERCICE II

On considère la fonction f , définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^2 + x + 2$

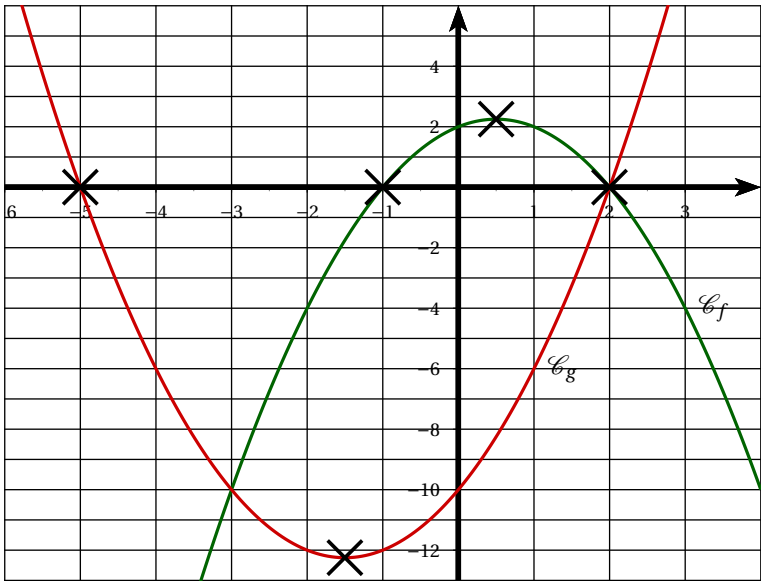
1. $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 2 = 9 > 0$; le trinôme a deux racines :
   $x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{9}}{-2} = \dfrac{2}{-2} = \boxed{-1}$ et
   $x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{9}}{-2} = \dfrac{-4}{-2} = \boxed{2}$ 1 pt
2. On sait que si l'expression $ax^2 + bx + c = 0$ a deux racines x_1 et x_2,
   alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.
   Par conséquent : $-x^2 + x + 2 = \boxed{-(x+1)(x-2)}$ 0,5 pt
3. Ce trinôme du second degré est du signe du coefficient de x^2, -1, donc négatif, à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines et positif entre les racines.
   Tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f(x) = -x^2 + x + 2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   0,5 pt
4. D'après le tableau de signes, l'inéquation
   $f(x) > 0$ a pour solutions $\boxed{\mathscr{S} =]-1\,;\,2[}$. 0,5 pt
5. Le coefficient de x^2 est négatif, donc la fonction est d'abord croissante, puis décroissante.
   Le sommet a pour abscisse $-\dfrac{b}{2a} = \dfrac{1}{2}$; son ordonnée est $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{9}{4}$.
   Tableau de variation de f : 1 pt

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f(x)$		↗	0	↗	$\frac{9}{4}$	↘	0	↘	

6. **Courbe** :



0,5 pt

7. On considère la fonction g , définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^2 + 3x - 10$.

- $g(x)$ est un trinôme du second degré. Le sommet a pour coordonnées $\left(-\frac{3}{2}\,;\,-\frac{49}{4}\right)$.
- **Racines** : On calcule le discriminant :
  $\Delta = 49 > 0$ donc $g(x)$ a deux racines :
  $x_3 = \frac{-3-7}{2} = \boxed{-5}$ et $x_4 = \frac{-3+7}{2} = \boxed{2}$.
- Le coefficient de x^2 est positif, donc la fonction g est décroissante sur $\left]-\infty\,;\,-\frac{3}{2}\right]$ puis croissante sur $\left[-\frac{3}{2}\,;\,+\infty\right[$.
- **Tableau de variation**

x	$-\infty$		-5		$-\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$g(x)$		↘	0	↘	$-\frac{49}{4}$	↗	0	↗	

2 pt

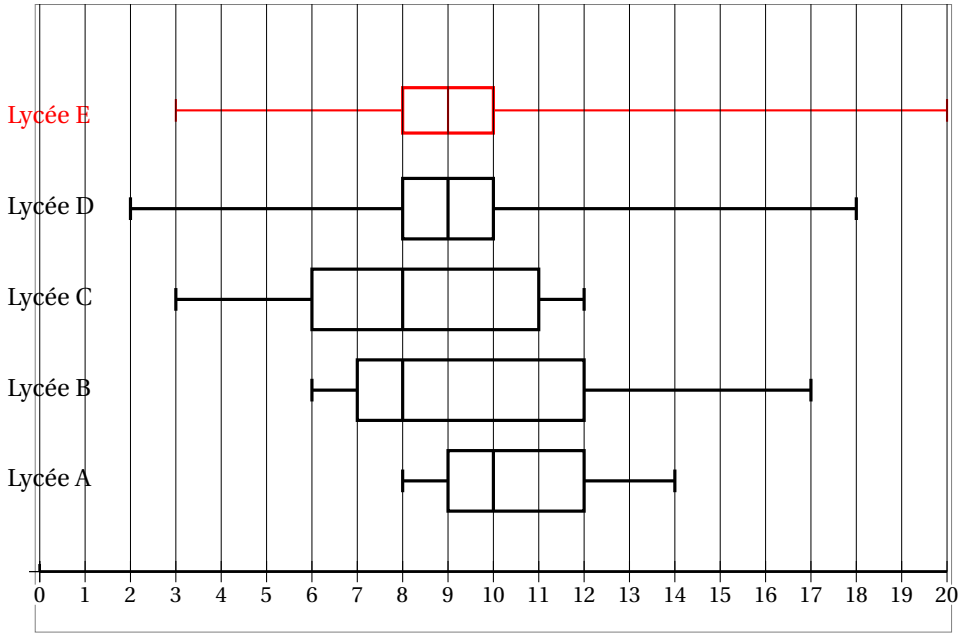
8. On considère l'inéquation : $f(x) \geqslant g(x)$.

- Graphiquement : les solutions sont les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ situés au-dessus de ceux de $\mathscr{C}_g$; on trouve $\boxed{\mathscr{S} = [-3\,;\,2]}$.
- Algébriquement, on résout l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$, c'est-à-dire
  $-x^2 + x + 2 \geqslant x^2 + 3x - 10$.
  Cela équivaut à : $-2x^2 - 2x + 12 \geqslant 0$.
  $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-2) \times 12 = 100 > 0$; il y a deux racines $x_5 = \frac{2-10}{-4} = 2$ et $x_6 = \frac{2+10}{-4} = -3$.
  Le trinôme est positif (du signe opposé au coefficient de x^2) entre les racines, donc $\boxed{\mathscr{S}\,[-3\,;\,2]}$ 2 pt

EXERCICE III

Partie A

Quatre lycées, notés A, B, C et D comptent chacun le même nombre d'élèves de première ES.
Les moyennes en mathématiques des élèves de première ES des quatre lycées sont représentées ci-dessous par des diagrammes en boîte :



1. Le lycée qui a l'étendue de notes la plus faible est le **lycée A** (l'étendue vaut 6). 0,5 pt
2. Ce sont les **lycées A, B et C** dans lesquels un quart des élèves au moins a 11 ou plus, car le troisième quartile est supérieur ou égal 11. 0,5 pt
3. Dans le lycée C, la valeur maximum est 12. Dans le lycée A et le lycée B, le troisième quartile vaut 12, donc ce sont dans les **lycées A et B** que 25 % des élèves sont meilleurs que tous les élèves du lycée C. 1 pt
4. Dans les **les quatre lycées**, la médiane est supérieure ou égale à 8, donc 50 % des élèves au moins ont 8 ou plus. 0,5 pt
5. Pour le lycée A, la médiane vaut 10 donc 50 % des élèves ont 10 ou plus. Pour les autres lycée, la médiane est inférieure à 10, donc moins de 50 % des élèves ont plus de 10 ; or tous les lycées ont le même nombre d'élèves. Il s'agit donc du **lycée A**. 1 pt
6. La meilleure note a été obtenue dans le **lycée D** ; il s'agit de 18. 0,5 pt
7. Le quart le plus fort des élève est le plus homogène dans le **lycée C** (troisième quartile égal à 11 et note maximum 12). 1 pt
8. Le quart le plus faible des élève le plus hétérogène est dans le **lycée D** (les notes du premier quart vont de 2 à 8). 1 pt
9. L'intervalle interquartile est le plus grand dans les **lycées B et C** (il vaut 5 dans ces deux lycées). 0,5 pt
10. Le lycée ayant le plus d'élèves ayant 6 ou moins est le **lycée C** (25 % puisque $Q_1 = 6$ pour ce lycée). 0,5 pt

Partie B

Les élèves du lycée E ont obtenu les résultats suivants :

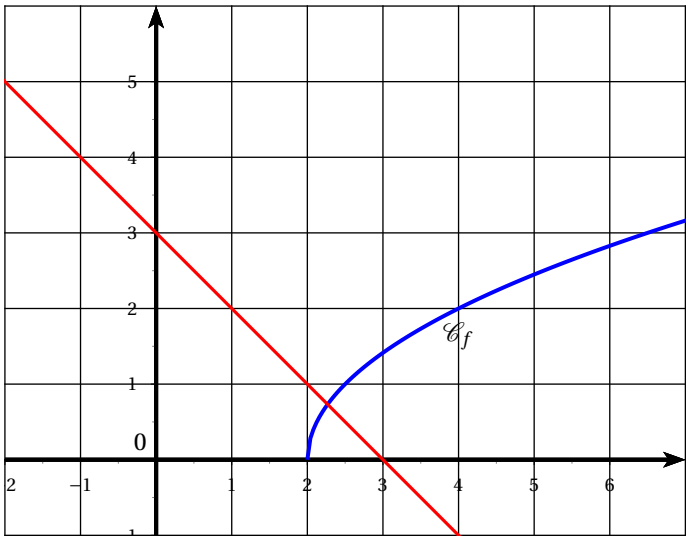
Notes	3	6	8	9	10	11	12	14	16	20
Effectif	2	5	14	13	15	5	6	1	2	1

1. On utilise la calculatrice. On trouve $\boxed{\overline{x} = 9,5}$, $V = \dfrac{\sum n_i x_i^2}{N} - \overline{x}^2 = \boxed{7}$ et $\boxed{\sigma \approx 2,65}$. 1,5 pt
2. L'écart-type des notes du lycée D vaut 2.8.
   L'écart-type du lycée E est plus faible que celui du lycée D, donc le niveau est plus homogène dans le **lycée E**. 1 pt
3. Dans le lycée E, le minimum est 3, le maximum 20.
   L'effectif total du lycée E est 64, donc la médiane est la moyenne entre x_{32} et x_{33}, donc $\boxed{9}$.
   $\dfrac{64}{4} = 16$ donc $Q_1 = x_{16} = \boxed{8}$; $3 \times \dfrac{64}{4} = \boxed{48}$ donc $Q_3 = x_{48} = \boxed{10}$. 1 pt
4. Diagramme en boîte complété sur la figure en début d'exercice. 0,5 pt

EXERCICE IV

1. (a) On considère les fonctions $f : x \mapsto f(x) = \sqrt{2x-4}$ et $g : x \mapsto g(x) = -x+3$. Dans le graphique ci-dessous, on a construit la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f.

   g est une fonction affine, donc sa représentation graphique $\mathscr{C}_g$ est ne droite, qui passe par les points de coordonnées $(0\,;\,3)$ et $(3\,;\,0)$.



0,5 pt

   (b) Les deux courbes se rencontrent en un point.

   Il y a donc une seule solution α à l'équation $f(x) = g(x)$.

   On a $\boxed{2 < \alpha < 2,5}$ 0,5 pt

2. $f(x) = g(x)$ équivaut à $\sqrt{2x-4} = -x+3$ donc $\sqrt{2x-4} - (-x+3) = 0$, donc $h(x) = 0$. 0,5 pt

3. À la calculatrice, on trouve successivement $2 < \alpha < 3$ puis $2,2 < \alpha < 2,3$ puis $2,26 < \alpha < 2,27$. 1,5 pt

4. On veut résoudre $f(x) = g(x) \Leftrightarrow\Leftrightarrow \sqrt{2x-4} = -x+3$.

$$\sqrt{2x-4} = -x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4 \geqslant 0 \\ -x+3 \geqslant 0 \\ 2x-4 = (-x+3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 2 \\ x \leqslant 3 \\ 2x-4 = x^2-6x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 2 \\ x \leqslant 3 \\ x^2-8x+13 = 0 \end{cases}.$$

   On résout $x^2 - 8x + 13 = 0$.

   $\Delta = 12 > 0$. On trouve deux solutions.

   $x_1 = \dfrac{8-\sqrt{12}}{2} = \dfrac{8-2\sqrt{3}}{2} = 4-\sqrt{3}$ qui est bien compris entre 2 et 3.

   $x_2 = 4+\sqrt{3} > 3$ donc x_2 ne convient pas.

   La seule solution est donc $4-\sqrt{3}$; $\boxed{\mathscr{S} = 4-\sqrt{3}}$. 2 pt