Fonction dérivée

Table des matières

Activités A et B page 114

Activité 1 page 116

I Nombre dérivé et tangente

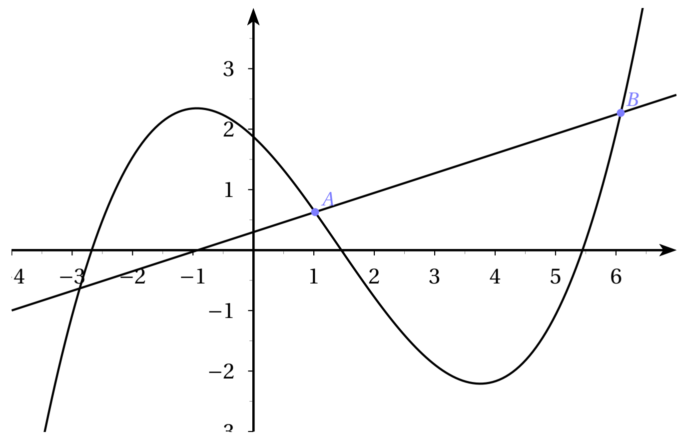
I.1 Taux d'accroissement

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I ; soient $A\left(a\,;\,f(a)\right)$ et $B\left(b\,;\,f(b)\right)$ deux points de la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de f.

Le taux d'accroissement de f entre a et b est le quotient $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Exemple :



Ce taux d'accroissement est le coefficient directeur de la droite sécante (AB) à la courbe $\mathscr{C}_f$.

I.2 Nombre dérivé

Définition

On suppose $A(a\,;\,f(a))$ **fixe** et on considère un point M variable. On note $a+h$ l'abscisse de A.

Le taux d'accroissement entre a et $a+h$ est $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Si ce nombre $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers un réel quand h tend vers 0, la sécante tend vers une « croie limite »appelée tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en a et ce nombre limite est appelé nombre dérivé de f en a.

On ne note $f'(a)$ et on écrit : $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)$.

Remarque : $f'(a)$ est alors le **coefficient directeur de la tangente** à la courbe $\mathscr{C}_f$ en a.

Exemples :

Exemple 1 $f(x) = x^2$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2-h^2}{h} = \frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = 2a+h \text{ qui tend vers } 2a \text{ quand } h \text{ tend vers } 0.$$

$\boxed{f'(a) = 2a}$.

Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en a est $2a$.

Exemple 2 $f(x) = \dfrac{1}{x}$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h} = \frac{-\frac{h}{a(a+h)}}{h} = -\frac{1}{a(a+h)} \text{ qui tend vers } -\frac{1}{a^2} \text{ quand } h \text{ tend vers } 0.$$

$$\boxed{f'(a) = -\frac{1}{a^2}}$$

Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en a est $-\dfrac{1}{a^2}$.

I.3 Équation de la tangente en a

La tangente en a a pour coefficient directeur le nombre $f'(a)$.

Son équation est de la forme $y = mx + p$ avec $m = f'(a)$ donc $y = f'(a)x + p$.
La droite passe par le point de coordonnées $(a\ ;\ f(a))$ donc les coordonnées de ce point vérifient l'équation : $f(a) = f'(a)a + p$.

$p = -f'(a)a + f(a)$

On en déduit : $y = f((a)x - f'(a)a + f(a) = f'(a)(x - a) = f(a)$.

Propriété

Léquation réduite de la tangente en a à la courbe $\mathscr{C}_f$ est $\boxed{y = f'(a)(x-a) = f(a)}$

Exercices nº 1 ; 2 ; 3 page 119

II Fonction dérivée

II.1 Fonction dérivée

Exemple : soit $f : x \mapsto x^2$.
Pour chaque nombre a, on peut calculer le nombre dérivé $f'(a) = 2a$.
À chaque valeur de a, on peut associer le nombre dérivé $f'(a) = 2a$.
On définit ainsi une fonction $f' : a \mapsto f'(a)$.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et admettant en chaque valeur a de I un nombre dérivé $f'(a)$.
On appelle fonction dérivée de f la fonction $f : x \mapsto f'(x)$

Exemples :

- Si $f : x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$, alors $f' : x \mapsto 2x$
- Si $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]-\infty\ ;\ 0[$ ou sur $]0\ ;\ =\infty[$, alors $f' : x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$

II.2 Dérivée des fonctions usuelles

Fonction f	Fonction dérivée f'
$f(x) = k,\ k \in \mathbb{R}$ (fonctions constantes)	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax + b$ (fonctions affines)	$f'(x) = a$
$f(x) = x$	$f(x) = 1$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^n$, ñ $\in \mathbb{N}$ $(n \geqslant 2)$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n},\ n \in \mathbb{N}^*$	$f(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$
$f(x) = \sqrt{x}\ (x \geqslant 0)$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}},\ x > 0$

Exemples :

- $f(x) = x^3$; $f(x) = x^n$ avec $n = 3$ donc $f'(x) = nx^{n-1} = \boxed{3x^2}$

- $f(x)=x^7=x^n$ avec $n=7$: $f'(x)=nx^{n-1}=7x^6$ donc $\boxed{f'(x)=7x^6}$
- $f(x)=\dfrac{1}{x^5}=\dfrac{1}{x^n}$ abvec $n=5$ donc $f'(x)=-\dfrac{n}{x^{n+1}}=\boxed{-\dfrac{5}{x^6}}$

II.3 Dérivée d'une somme

> **Propriété**
> Soient f et g deux fonctions définies et dérivables sur un même intervalle I.
> Alors $f+g$ est dérivable et $(f+g)'=f'+g'$

Exemple : $u(x)=x^5+x^2$; $u=f+g$ avec $f(x)=x^5$ et $g(x)=x^2$.
$u'=(f+g)'=f'+g'$ avec $f'(x)=5x^4$ et $g'(x)=2x$.
On en déduit $\boxed{u'(x)=5x^4+2x}$.

II.4 Dérivée du produit d'un réel par une fonction

> **Propriété**
> Soit k un réel et soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
> Alors kf est dérivable sur I et $(kf)'=kf'$.

Exemples :

1. $f(x)=2x^5$; $f=ku$ avec $k=2$ et $u(x)=x^5$.
   $f'=ku'$ avec $u'(x)=5x^4$ donc $f'(x)=2\times 5x^4$ d'où $\boxed{f'(x)=10x^4}$.

II.5 Dérivée d'une fonction polynôme

Exemple : Soit $f : x\mapsto 3x^5+7x^2+2x-1$.
On peut voir f comme $f=3u-7v+2w-t$ avec $u(x)=x^5$, $v(x)=x^2$, $w(x)=x$ et $t(x)=1$.
On a vu que la dérivée d'une somme est la somme des dérivées et en appliquant la propriété sur la dérivée d'une constante multipliée par une fonction, on obtient :
$f'=3u'-7v'+2w'-t'$ avec $u'(x)=5x^4$, $v'(x)=2x$, $w'(x)=1$ et $t'(x)=0$.
On en déduit $f'(x)=3\times 5x^4-7\times 2x+2\times 1-0$ donc $\boxed{f'(x)=15x^4-14x+2}$

II.6 Dérivée d'un produit de deux fonctions

> **Propriété**
> Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un même intervalle I, alors $u\times v$ est dérivable sur I et
> $$(uv)'=u'v+uv'$$

Exemples

a) $f(x)=(7x-5)(2x+3)$; $f=uv$ avec $u(x)=7x-5$ et $v(x)=2x+3$.
$f'=(uv)'=u'v+uv'$ avec $u'(x)=7$ et $v'(x)=2$.
On en déduit $f'(x)=7(2x+3)+(7x-5)\times 2=7(2x+3)+2(7x-5)=14x+21+14x-10=\boxed{28x+11}$.

b) $f(x)=(2x+3)\sqrt{x}$; $f=uv$ avec $u(x)=2x+3$ et $v(x)=\sqrt{x}$.

$f=u'v+uv'$ avec $u'(x)=2$ et $v'(x)=\dfrac{1}{é\sqrt{x}}$.

Alors $f'(x)=2\sqrt{x}+(2x+3)\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{\left(2\sqrt{x}\right)^2+2x+3}{2\sqrt{x}}=\dfrac{4x+2x+3}{2\sqrt{x}}=\dfrac{6x+3}{2\sqrt{x}}=\boxed{\dfrac{3(2x+1)}{2\sqrt{x}}}$

II.7 Dérivée de l'inverse d'une fonction

Propriété

Soit u ne fonction dérivable sur un intervalle I et ne s'annulant pas.

Alors $\dfrac{1}{u}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^2}$.

Exemple

$f(x)=\dfrac{1}{x^2+x+1}$ sur $\mathbb{R}$: $f=\dfrac{1}{u}$ avec $u(x)=x^2+x+1$ qui ne sannume pas sur $\mathbb{R}$.

$f'=\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u'(x)=2x+1$.

Par conséquent : $\boxed{f'(x)=-\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}}$

II.8 Dérivée d'un quotient

Propriété

Soient u et v deux fonction dérivables sur I, v ne s'annulant pas sur I.

Alors $\dfrac{u}{v}$ est dérivable et $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

Exemple :

$f(x)=\dfrac{2x+3}{7x-1}$ sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{7}\right\}$.

$f=\dfrac{u}{v}$ avec $u(x)=2x+3$ et $v(x)=7x-1$.

$f'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $u'(x)=2$ et $v'(x)=7$.

Par conséquent : $f'(x)=\dfrac{2(7x-1)-7(2x+3)}{(2x+3)^2}=\dfrac{14x-2-14x-21}{(2x+3)^2}=\boxed{-\dfrac{23}{(2x+3)^2}}$

III Sens de variation et dérivée

Théorème

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

- Si f' est strictement positive (en s'annulant éventuellement en des points isolés), alors f est croissante.
- Si $f'=0$ sur I, alors f est constante sur I.
- Si f' est strictement négative (en s'annulant éventuellement en des points isolés), alors f est décroissante.

Exemples :

1. $f : x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$; $f'(x) = 3x^2 \geqslant 0$ ($f'(x) = 0$ pour $x = 0$).
   f est donc croissante sur $\mathbb{R}$, $\mathscr{C}_f$ admettant une tangente horizontale en 0
   Tableau de variation :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$\nearrow$	

2. Soit $f = x \mapsto x^2$: $f'(x) = 2x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$
   On en déduit le tableau de variation

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

3. Soit $f : x \mapsto x^3 + 5x^2 + 3x - 1$ sur $\mathbb{R}$.
   $f'(x) = 3x^2 + 10x + 3$
   Étudions le signe : $\Delta = 100 - 36 = 64 > 0$. Il y a deux racines : -3 et $-\dfrac{1}{3}$.
   Le coefficient de x^2 est 3, positif, donc $3x^2 + 10x + 3$ est positif (du signe de 3) sur $]-\infty\,;\,-3] \cup \left[-\dfrac{1}{3}\,;\,+\infty\right[$ et négatif sur $\left[-3\,;\,-\dfrac{1}{3}\right]$.
   On en déduit le tableau de variation :

x	$-\infty$		-3		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
$3x^2 + 10x + 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

IV Liens Internet vers le site euler pour s'entraîner

Exercices guidés :

- Calculer la fonction dérivée d'une fonction polynôme en indiquant les propriétés utilisées
- Calculer la fonction dérivée de l'inverse d'une fonction polynôme en indiquant les propriétés utilisées
- Calculer la fonction dérivée d'une fonction rationnelle en indiquant les propriétés utilisées
- Calculer la fonction dérivée du produit d'une fonction polynôme et de la fonction racine carrée en indiquant les pro
- Calculer la fonction dérivée du produit de deux fonctions polynômes en indiquant les propriétés utilisées
- Calculer la fonction dérivée d'une fonction homographique en indiquant les propriétés utilisée

Générateur d'exercices (cliquer sur format .pdf)

- Expression algébrique de la fonction dérivée d'une fonction monôme
- Expression algébrique de la fonction dérivée d'une fonction polynôme
- Expression algébrique de la fonction dérivée de l'inverse d'une fonction polynôme
- Expression algébrique de la fonction dérivée d'une fonction rationnelle
- Expression algébrique de la fonction dérivée du produit d'une fonction polynôme et de la fonction racine carrée
- Expression algébrique de la fonction dérivée du quotient d'une fonction polynôme et de la fonction racine carrée
- Expression algébrique de la fonction dérivée du produit de deux fonctions polynômes
- Expression algébrique de la fonction dérivée d'une fonction homographique
- Expression algébrique de la fonction dérivée d'une fonction rationnelle dont le numérateur est une fonction affine
- Expression algébrique de la fonction dérivée d'une fonction rationnelle dont le numérateur est une fonction trinôm