

# 1<sup>re</sup>ES-L : correction du devoir sur feuille n° 2

## I

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 7}{x^2 + 3}$ .

1.  $f = \frac{u}{v}$  avec  $\begin{cases} u(x) = x^2 - 4x + 7 \\ v(x) = x^2 + 3 \end{cases}$

$$f = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \text{ avec } \begin{cases} u'(x) = 2x - 4 \\ v'(x) = 2x \end{cases}$$

On en déduit :  $f'(x) = \frac{(2x - 4)(x^2 + 3) - 2x(x^2 - 4x + 7)}{(x^2 + 3)^2}$

$$= \frac{2x^3 + 6x - 4x^2 - 12 - 2x^3 + 8x^2 - 14x}{(x^2 + 3)^2} = \frac{4x^2 - 8x - 12}{(x^2 + 3)^2} = \frac{4(x^2 - 2x - 3)}{(x^2 + 3)^2}$$

2. Comme  $(x^2 + 3)^2 > 0$ ,  $f'(x)$  est du signe de  $x^2 - 2x - 3$ .

Le discriminant est  $\Delta = 16 > 0$ ; il y a donc deux racines, qui sont  $x_1 = \frac{2-4}{2} = -1$  et  $x_2 = \frac{2+4}{2} = 3$ .

Alors :  $f'(x) = \frac{4(x+1)(x-3)}{(x^2+3)^2}$ .

$f'(x)$  s'annule en -1 et en 3 et est positive (du signe du coefficient de  $x^2$ ) à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines.

On en déduit que  $f$  est croissante sur  $] -\infty ; -1]$ , décroissante sur  $[-1 ; 3]$  et croissante sur  $[3 ; +\infty[$ .

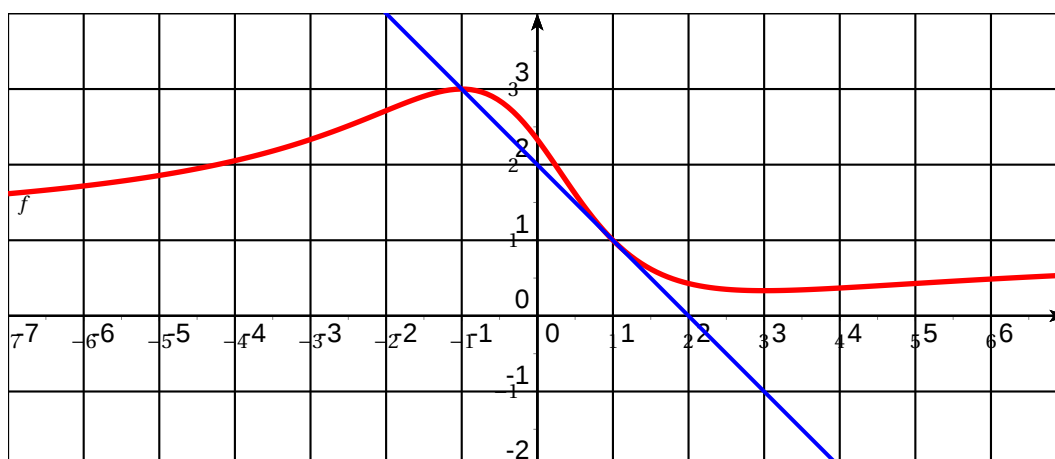
Tableau de variation :

|                  |           |      |     |           |               |     |           |
|------------------|-----------|------|-----|-----------|---------------|-----|-----------|
| $x$              | $-\infty$ | $-1$ | $3$ | $+\infty$ |               |     |           |
| $f'(x)$          |           | $+$  | $0$ | $-$       | $0$           | $+$ |           |
| $\text{sm} f(x)$ |           |      | $3$ |           | $\frac{1}{3}$ |     | $+\infty$ |
|                  | $-\infty$ |      |     |           |               |     |           |

3. L'équation de la tangente à  $\mathcal{C}$  en 1 est  $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$ .

$f'(1) = -1$ ;  $f(1) = 1$  donc l'équation est  $y = -(x - 1) + 1$  d'où  $y = -x + 2$

4. Représenter la tangente  $T$  sur le graphique ci-dessous.



## II

1. Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x.$$

$f$  est dérivable :  $f(x) = 2(x^3 - 30x^2 + 225x)$  donc  $f'(x) = 6[x^2 - 20x + 75]$ .

$f'(x)$  est du signe de  $x^2 - 20x + 75$ .

$$\Delta = (-20)^2 - 4 \times 1 \times 75 = 400 - 300 = 100 = 10^2 > 0.$$

Le trinôme a donc deux racines :  $x_1 = \frac{20-10}{2} = 5$  et  $x_2 = \frac{20+10}{2} = 15$ .

Il est du signe du coefficient de  $x^2$  donc positif à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines.

On en déduit le **tableau de variations** de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  :

|         |           |   |      |           |   |           |
|---------|-----------|---|------|-----------|---|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | 5 | 15   | $+\infty$ |   |           |
| $f'(x)$ |           | + | 0    | -         | 0 | +         |
| $f(x)$  |           |   | 1000 |           | 0 |           |
|         | $-\infty$ |   |      |           |   | $+\infty$ |

2.

(a) Si  $L$  est la longueur de la boîte, on a  $2L + 2x = 30$  donc  $x = 15 - L \leq 15$  donc  $0 \leq x \leq 15$ .

(b) La boîte a une longueur  $L = 15 - x$ , une largeur  $x$  et une hauteur  $h = 30 - 2x$ .

Son volume est  $V(x) = Lxh$  donc  $V(x) = (15-x)x(30-2x) = 2x(15-x)^2 = 2x(x^2 - 30x + 225) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$ .

On reconnaît l'expression de  $f(x)$ , donc  $V(x) = f(x)$ .

(c) D'après l'étude des variations de  $f$ , le volume est **maximal** pour  $x = 5$  et donc  $L = 10$ . la hauteur de la brique est alors 20 et le volume  $1000 \text{ cm}^3$ , donc 1 L.

### III

Dans un restaurant, le coût total en euros pour la fabrication de  $x$  repas est donné par la relation

$$C(x) = 2x^2 - 230x + 7200$$

pour  $x$  compris entre 30 et 120.

$$1. C_M(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{2x^2 - 230x + 7200}{x}$$

$$= 2x - 230 + \frac{7200}{x}$$

$$2. C_M(x) = 2x - 230 + 7200 \times \frac{1}{x} \text{ donc } C'_M(x) = 2 + 7200 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2 - \frac{7200}{x^2}$$

$$= 2 \times \left(1 - \frac{3600}{x^2}\right) = 2 \times \left(\frac{x^2 - 3600}{x^2}\right) = 2 \times \frac{(x-60)(x+60)}{x^2}$$

3. Sur  $[30 ; 120]$ ,  $x^2 > 0$  et  $x + 60 > 0$  et  $2 > 0$ , donc  $C'_M(x)$  est du signe de  $x - 60$ , donc positif pour  $x \geq 60$  et négatif pour  $x \leq 50$ .

4. On en déduit le **sens de variation** de  $C_M$  sur  $[30 ; 120]$  :

|            |    |             |     |
|------------|----|-------------|-----|
| $x$        | 30 | 60          | 120 |
| $C'_M[x]$  | -  | $\emptyset$ | +   |
| $(C_M(x))$ | 70 | 10          | 70  |

5. Il faut donc fabriquer **60** repas pour que le coût moyen soit minimal.

## IV

La demande  $f(p)$  d'un produit proposé à un prix  $p \in [11 ; +\infty[$  (en euros) est donnée par

$$f(p) = \frac{100000p}{p^2 - 100}.$$

### Etude de la demande

$$1. f(11) = \frac{1100000}{21} \approx 52381$$

$$f(15) = 12000; f(90) = 1125.$$

2. Pour  $p > 11$ , le dénominateur et le numérateur sont positifs donc  $f(p) > 0$ .

$$f'(p) = \frac{100000(p^2 - 100) - 2p(100000p)}{(p^2 - 100)^2} = -\frac{100000(p^2 + 100)}{(p - 10)^2(p + 10)^2} \text{ est négative donc } f \text{ est décroissante.}$$

3. On suppose que le prix  $p$ , initialement à 15€, subit une augmentation de 1 %.

$$(a) p_1 = 1,01p = 1,01 \times 15 = 15,15 \text{ €}.$$

$$(b) f(15,15) \approx 11697; \frac{f(15,15)}{f(15)} \approx 0,975 = 1 - 0,025 \text{ ce qui montre que la demande a baissé de 2.5 \%. On a donc}$$

$$E(15) = -2.5.$$

### Etude de l'élasticité de la demande

$$1. E(p) = \frac{pf'(p)}{f(p)} = \frac{-100000p(p^2 + 100)(p^2 - 100)}{(p^2 - 100)^2 \times 100000p} = -\frac{p^2 + 100}{p^2 - 100} = \frac{-p^2 - 100}{p^2 - 100} = \frac{p^2 - 100 - 2p^2}{p^2 - 100} = 1 - \frac{2p^2}{p^2 - 100}.$$

$$2. E(15) = 1 - \frac{2 \times 15^2}{15^2 - 100} = 1 - \frac{18}{5} = 1 - 3.6 = -2.6 \text{ ce qui est très voisin du résultat précédemment calculé.}$$

3.  $E(p)$  est du signe de  $f'(p)$  qui est négatif. Cela confirme bien la diminution de la demande quand le prix augmente.

$$4. E = 1 - \frac{u}{v} \text{ avec } u(p) = 2p^2 \text{ et } v(p) = p^2 - 100.$$

$$E' = -\left(\frac{u}{v}\right)' = -\frac{u'v - uv'}{v^2} \text{ avec } u'(p) = 4p \text{ et } v'(p) = 2p.$$

$$\text{On en déduit : } E'(p) = -\frac{4p(p^2 - 100) - 2p(2p^2)}{(p^2 - 100)^2} = \frac{400p}{(p^2 - 100)^2} \text{ toujours positif.}$$

On en déduit que  $E$  est une fonction **croissante** de  $p$ .

$$5. E(p) = -1.25 \Leftrightarrow \frac{2p^2}{p^2 - 100} = 2,25 \Leftrightarrow 2p^2 = 2,25p^2 - 225 \Leftrightarrow 0,25p^2 = 225 \Leftrightarrow p^2 = 900 \Leftrightarrow p = 30, \text{ donc } p_0 = 30 \text{ €}.$$

6. Comme  $E(30) = -1.25$ , l'augmentation de 30 centimes d'euros correspondant à une hausse de 1 %, on déduit que la demande diminue de 1.25 %.