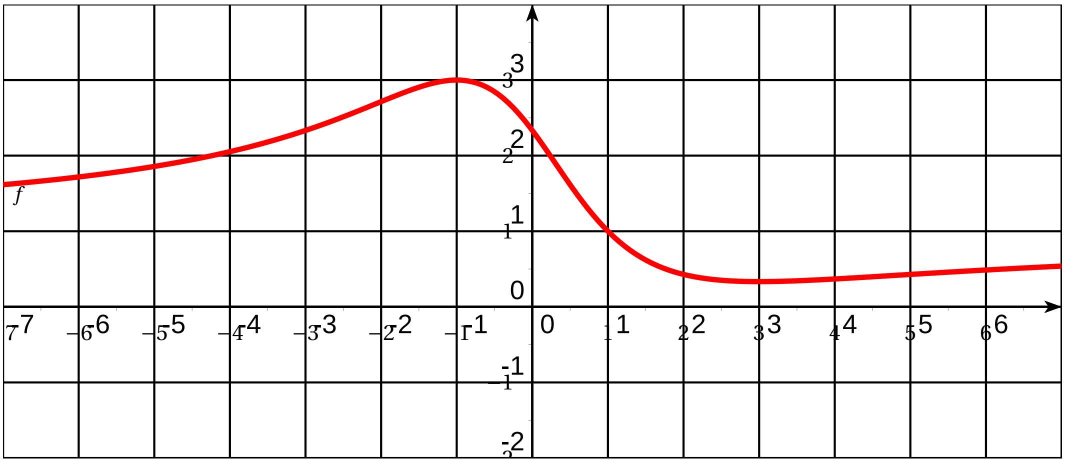
1reES-L :devoir sur feuille n° 2

I

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 7}{x^2 + 3}$.

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

1. Calculer $f'(x)$ où f désigne la dérivée de la fonction f.
2. Étudier les variations de la fonction f.
3. Donner une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.
4. Représenter la tangente T sur le graphique ci-dessous.



II

1. Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$.

2. On veut construire le patron d'une boîte de lait dans une feuille cartonnée de 30 cm de côté.

   Le patron est donné par la figure 1 ci-dessous et la figure 2 est celle de la boîte qui est un parallélépipède rectangle

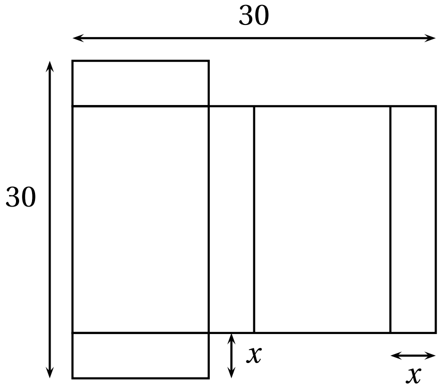


Figure 1

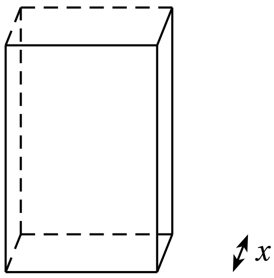


Figure 2

L'objectif est de trouver la valeur de x qui rend le volume de la boîte maximal.

(a) Expliquer pourquoi les valeurs de x appartiennent à $]0\ ;\ 15[$.

(b) Exprimer en fonction de x le volume de cette boîte.

(c) Pour quelle valeurs de x le volume de cette boîte est-il maximal ?

III

Dans un restaurant, le coût total en euros pour la fabrication de x repas est donné par la relation

$$C(x) = 2x^2 - 230x + 7\,200$$

pour x compris entre 30 et 120.
Lorsque x repas sont fabriqués, on appelle coût moyen d'un repas le quotient $\dfrac{C(x)}{x}$ qu'on note $C_M(\mathrm{x})$.

1. Donner l'expression de $C_M(x)$ en fonction de x.
2. Calculer la dérivée de C_M.
3. Montrer que cette dérivée a le même signe que $x - 60$ sur l'intervalle $[30\ ;\ 120]$.
4. Étudier le sens de variation de C_M sur $[30\ ;\ 120]$.
5. Combien de repas faut-il fabriquer our que le coût moyen soit minimal ?

IV

Définition (élasticité)

On note p le prix d'un produit en euros et $f(p)$ la demande liée à ce produit pour le prix p. L'élasticité $E(p)$ de la demande par rapport au prix p est le pourcentage de variation de la demande pour une augmentation de 1 % du prix p.

La demande $f(p)$ d'un produit proposé à un prix $p \in [11\ ;\ +\infty[$ (en euros) est donnée par

$$f(p) = \frac{100\,000p}{p^2 - 100}.$$

Etude de la demande

1. Calculer la demande pour $p = 11$, $p = 15$ et $p = 90$ en arrondissant si nécessaire à l'unité près.
2. Verifier que $f(p) > 0$ pour tout $p > 11$.
   Montrer que f est décroissante sur $[11\ ;\ +\infty[$.
3. On suppose que le prix p, initialement à 15 €, subit une augmentation de 1 %.
   (a) Calculer le nouveau prix p_1, ainsi que la demande correspondante à ce prix, arrondie à l'unité près.
   (b) En déduire $E(15)$, l'élasticité de la demande par rapport au prix de 15 €.

Etude de l'élasticité de la demande

Supposons qu'une augmentation Δp du prix induise une augmentation Δf de la demande. $\dfrac{\Delta f}{f}$ est le taux d'augmentation de la demande et $\dfrac{\Delta p}{p}$ le taux d'augmentation du prix.
On peut écrire : $E(p) = \dfrac{\Delta f / f}{\Delta p / p} = \dfrac{\Delta f}{\Delta p} \times \dfrac{p}{f(p)} \approx p \times \dfrac{f'(p)}{f(p)}$ (en supposant que les variations sont petites.

Cette dernière expression est celle utilisée par les économistes.

Dans toute la suite, c'est cette formule qui sera utilisée, donc

$$E(p) = p \times \frac{f'(p)}{f(p)}$$

1. Établir l'égalité $E(p) = 1 - \dfrac{2p^2}{p^2 - 100}$.
2. Calculer $E(15)$ à l'aide de cette dernière expression et comparer avec le résultat obtenu à la première partie.
3. Quel est le signe de $E(p)$ pour $p > 11$? Justifier la réponse et interpréter ce résultat.
4. Calculer $E'(p)$ et en déduire le tableau de variation de E .
5. Calculer la valeur de p_0 pour laquelle l'élasticité est de -1.25.
6. Comment évolue la demande quand le prix passe de 30 € à 30.30 € ?