# Taux d'évolution

## Table des matières



# Activités préparatoires pages 10 et 12

# I Coefficient multiplicateur et taux d'évolution

**Propriété**

Appliquer un taux d'évolution $t$ à un nombre revient à le multiplier par $C = 1 + t$, appelé coefficient multiplicateur.

**Justification** : soit $x$ un nombre. Le montant de l'évolution est $xt$, donc ce nombre devient $x + xt = \boxed{x(1+t)}$.

**Remarque** ; si $t$ est positif, on a affaire à une augmentation ; si $t$ est négatif, il s'agit d'une diminution.

**Exemples** :

a) Un objet coûte 30 € ; son prix augmente de 3 %. Le coefficient multiplicateur est $C = 1 + \dfrac{3}{100} = 1{,}03$. Le prix devient $30 \times 1{,}03 = \boxed{30{,}90\text{ €}}$.

b) La population d'une ville diminue de 1 %. Elle est donc multipliée par $C = 1 - \dfrac{1}{100} = 0{,}99$.

c) Un prix passe de 12 € à 12,36 €. Quel est le taux d'augmentation ?

Si $C$ est le coefficient multiplicateur, on a $12 \times C = 12{,}36$, donc $C = \dfrac{12{,}36}{12} = 1{,}03$.

Si $t$ est le taux d'évolution, $C = 1 + t$ donc $t = 0{,}03 = \dfrac{3}{100}$.

**Remarque** : on peut aussi calculer $t$ en calculant $t = \dfrac{\text{Valeur finale} - \text{Valeur initiale}}{\text{Valeur initiale}} = \dfrac{12{,}36 - 12}{12} = \dfrac{0{,}36}{12} = 0{,}03 = \dfrac{3}{100} = 3\,\%$, mais on remarque que $\dfrac{12{,}36 - 12}{12}$
$= \dfrac{12{,}36}{12} - \dfrac{12}{12} = C - 1$ donc, en fait, c'est le **même calcul** !

d) Une année, la population d'une ville est de 22 000 habitants. L'année suivante, elle n'est plus que de 20 900 habitants.

Le coefficient multiplicateur est $C = \dfrac{20\,900}{22\,000} = 0,95$.

Si $t$ est le taux, $C = 1 + t$ d'où $t = C - 1 = -0,05 = -\dfrac{5}{100} =$. Le taux est de $\boxed{-5\,\%}$.

La population a baissé de 5 %.

e) Un billet de spectacle est vendu 31,65 €. Le taux de T.V.A. est de 5,5 %. Quel est le prix hors-taxes ?

Le prix H.T est $\dfrac{31,65}{1,055} = 30$

# II Taux d'évolutions successives

## II.1 Taux d'évolution global

**Exemple :** En 2005, un objet avait un prix de 120 €. Son prix a augmenté en un an de 3 %. L'année suivante, son prix augmenté de 2 %.
Quel est alors son prix ?
Le premier coefficient multiplicateur est $C_1 = 1 + 3\,\% = 1 + \dfrac{3}{100} = 1,03$.

En 2006, son prix vaut : $120 \times C_1 = \times \left(1 + \dfrac{3}{100}\right) = 120 \times 1,03 = 123,6$ €.

Le deuxième coefficient directeur est $C_2 = 1 + 2\,\% = 1 + \dfrac{2}{100} = 1,02$.

En 2007, son prix vaut : $123,60 \times C_2 = 120 \times 1,03 \times \left(1 + \dfrac{2}{100}\right) = 120 \times 1,03 \times 1,02 = 126,072 \approx \boxed{126,7\text{ €}}$. Cela revient à calculer $120 \times C$ en posant $\boxed{C = C_1 \times C_2}$
On voit que cela revient à multiplier les coefficients multiplicateurs entre eux.

**Cas général**

**Définition**

Soient $y_0$, $y_1$, $\dots y_n$ des nombres réels strictement positifs.
$t_1$, $t_2$, $\dots t_n$ sont les taux d'évolution successifs permettant de passer de $y_1$ à $y_2$, de $y_2$ à $y_3$, ..., de $y_{n-1}$ à $y_n$.

Le coefficient multiplicateur global $T$ permettant de passer de $y_0$ à $y_n$ est le produit des $n$ coefficients.
$C = C_1 \times C_2 \times \cdots C_n$, autrement dit : $1 + T = (1 + t_1)(1 + t_2) \cdots (1 + t_n)$ donc

$$\boxed{T = (1 + t_1)(1 + t_2) \cdots (1 + t_n) - 1}$$

.

## II.2 Taux d'évolution réciproque

**Exemple**

Un objet coûte 20 €. Son prix subit une hausse de 2 %.

1. Quel est son nouveau prix ?
2. Quel est le montant de la baisse qu'il doit subir pour retrouver sa valeur initiale ?

**Réponses :**

1. Le coefficient multiplicateur associé à une hausse de 2 % est $1+2\ \% = 1,02$.
   Le nouveau prix est : $20 \times 1,02 = 20,4$.
2. Soit $t$ le taux de baisse ; le coefficient multiplicateur est alors : $1+t$.
   On doit donc avoir : $(20 \times 1,02) \times (1+t) = 20$, d'où, après simplification par 20 :
   $1,02 \times (1+t) = 1$, et, par conséquent : $1+t = \dfrac{1}{1,02}$.
   On en déduit : $\boxed{t = \dfrac{1}{1,02} - 1}$.
   Alors : $t \approx -0,01960$, soit environ $-1,96\ \%$.
   On dit que le taux d'évolution réciproque de 2 % est de $-1,96\ \%$.

**Définition et propriété**

Soit $t$ le taux d'évolution subi par un nombre. On appelle taux d'évolution réciproque le taux $t'$ qu'il faut alors appliquer pour retrouver le nombre de départ.

$$\text{On a : } t' = \frac{1}{1+t} - 1$$

**Démonstration :**

Soit $x$ un nombre, qui subit un taux dévolution égal à $t$.
Le coefficient multiplicateur est $1+t$, donc la nouvelle valeur est $x(1+t)$.
On cherche alors le montant du taux d'évolution $t'$ qui permet de retrouver la valeur $x$ initiale.
Le coefficient multiplicateur associé est $1+t'$.
On doit donc avoir : $[x(1+t)] \times (1+t') = x$.
En simplifiant par $x$, on obtient : $(1+t)(1+t') = 1$.
On en déduit : $1+t' = \dfrac{1}{1+t}$ d'où : $\boxed{t' = \dfrac{1}{1+t} - 1}$.
$t'$ est le **taux d'évolution réciproque** du taux $t$

**Exemples :**

1. Pour un taux $t = 3\ \%$, on obtient $t' = \dfrac{1}{1+0,03} - 1 \approx -0,029 \approx -2,9\ \%$.
   Le taux dévolution réciproque de 2 % est de -2,9 %.
2. Pour un taux $t = -10\ \%$, on obtient $t' = \dfrac{1}{1-0,1} - 1 \approx 0,111 \approx 11,1\ \%$.
   Le taux dévolution réciproque d'une baisse de 10 % est d'environ 11,1 %.