1reES : feuille d'exercices de révision (1)

I

Développements : on utilise la double distributivité : $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$ en respectant la règle des signes.

$A(x) = \ (3x+1)(5x+7) = 3x \times 5x + 3x \times 7 + 1 \times 5x + 1 \times 7 = 15x^2 + 21x + 5x + 7 = \boxed{15x^2 + 26x + 7}$.

$B(x) = \ (3x-5)(2x+7) = 3x \times 2x + 7 \times 3x - 5 \times 2x - 5 \times 7 = 6x^2 - 21x - 10x - 35 = \boxed{6x^2 - 31x - 35}$

$C(x) = \ (8x-1)(2x-3) = 8x \times 2x - 8x \times 3 - 1 \times 2x + 1 \times 3 = 16x^2 - 24x - 2x + 3 = \boxed{16x^2 - 26x + 3}$

$D(x) = \ 2(5x+2)(3x-1) = 2\left[5x \times 3x - 5x \times 1 + 2 \times 3x - 1 \times 2\right] = 2\left[15x^2 - 5x + 6x - 2\right] = 2\left[15x^2 + x - 2\right] = \boxed{30x^2 + 2x - 4}$

$E(x) = \ 8(3x-1)(7x-2) = 8\left[3x \times 7x - 2 \times 3x - 1 \times 7x + 1 \times 2\right] = 8\left[21x^2 - 6x - 7x + 2\right] = 8\left[21x^2 - 13x + 2\right] = \boxed{168x^2 - 104x + 16}$

II

Trouver rapidement les racines des expressions suivantes :
On utilise la propriété : « un produit d facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul »

$A(x) = \ (x-7)(3x-2)$; les racines sont 7 et $\dfrac{2}{3}$ (qui annulent respectivement $x-7$ et $3x-2$)

$B(x) = \ 7(x+2)(x-2)$; les racines sont -2 et 2

$C(x) = \ 9(7x-1)(2x+3)$; les racines sont $\dfrac{1}{7}$ et $-\dfrac{3}{2}$

$D(x) = \ (7x-3)^2$; il n'y a qu'une racine car $(7x-3)^2 = (7x-3)(7x-3)$ donc on trouverait deux fois la même racine

III

Si une expression du second degré a deux racines, le discriminant Δ est strictement positif; sil n'y a qu'une racine, $\Delta = 0$ et s'il n'y a aucune racine, $\Delta < 0$.

Résoudre rapidement (à l'aide des réponses du II) les inéquations :

a) $(x-7)(3x-2) \leqslant 0$.
On a trouvé deux racines (donc $\Delta > 0$).
On en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		7		$+\infty$
$A(x)$		+	0	−	0	+	

On en déduit : $\boxed{\mathscr{S} = \left[\dfrac{2}{3} ; 7\right]}$.

b) $7(x+2)(x-2) > 0$.
Les racines sont -2 et 2 (donc $\Delta > 0$).

x	$-\infty$		-2		2		π
$B(x)$		+	0	−	0	+	

$\boxed{\mathscr{S} = [-\infty ; -2[\cup]2 ; +\infty]}$

c) $9(7x-1)(2x+3) < 0$
Ls racines sont $-\dfrac{3}{2}$ et $\dfrac{1}{7}$

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$\frac{1}{7}$		$+\infty$
$C(x)$		+	0	−	0	+	

$\boxed{\mathscr{S} = \left]-\dfrac{2}{3} ; \dfrac{1}{7}\right[}$

d) $(7x-3)^2 \geqslant 0$
$\boxed{\mathscr{S} = \mathbb{R}}$ car le carré d'un nombre est toujours positif.

IV

Dans une facture hors-taxes, les deux tiers du montant net des travaux sont facturés avec un taux de TVA de 19,6 % et le reste à un taux de 5,5 %.
Le montant total de la facture TTC est de 1 149€.
Calculer le montant total de la TVA.
Soit x le montant hors-taxes. Les deux coefficients multiplicateurs correspondant aux deux montants de TVA sont $1;196$ et $1,055$.

Le montant TTC est $\boxed{\frac{2}{3}x \times 1,196 + \frac{1}{3}x \times 1,055}$.

Ce montant TTC est 1 149€.

On en déduit $x \times \left(\frac{2}{3} \times 1,196 + \frac{1}{3} \times 1,055\right) = 1\,149$ d'où : $x = \dfrac{1\,149}{\frac{2}{3} \times 1,196 + \frac{1}{3} \times 1,055} = \dfrac{1149}{1,149} = \boxed{1\,000}$.

Le montant hors-taxes est de 1 000€. Le montant total de la TVA est de $\boxed{149€}$.

V

Quels sont les taux d'évolution correspondant à :

a) une hausse de 2 % suivie d'une hausse de 15 %
Le coefficient multiplicateur global est $C = 1,02 \times 1,15 = 1,173$; le taux d'évolution global est $T = C - 1 = 0,173 = \dfrac{17,3}{100} = \boxed{17,3\,\%}$.

b) une baisse de 40 % suivie d'une baisse de 11 %
Le coefficient multiplicateur global est $C = 0,6 \times 0,89 = 0,534$; le taux d'évolution global est $T = C - 1 = -0,466 = \dfrac{46,6}{100} = \boxed{-46,6\,\%}$.

c) une hausse de 5 % suivie d'une baisse de 3 %
Le coefficient multiplicateur global est $C = 1,05 \times 0,97 = 1,0185$; le taux d'évolution global est $T = C - 1 = 0,0185 = \dfrac{1,85}{100} = \boxed{1,85\,\%}$.

d) une baisse de 24 % suivie d'une baisse de 50 %
Le coefficient multiplicateur global est $C = 0,76 \times 0,5 = 0,38$; le taux d'évolution global est $T = C - 1 = -0,62 = \boxed{-62\,\%}$.

VI

Une baisse de 20 % suivie d'une hausse de t % correspondent à une baisse globale de 12 %.
Calculer t.
On utilise les coefficients multiplicateurs :

$0.8 \times \left(1 + \dfrac{t}{100}\right) = 0,88$ donc $1 + \dfrac{t}{100} = \dfrac{0,88}{0,8} = 1,1$.

D'où : $\dfrac{t}{100} = 1,1 - 1 = 0,1$ donc $t = 0,1 \times 100 = 10$. $\boxed{t = 10}$.

VII

Le nombre de demandeurs d'emploi a augmenté de 2 % au mois de décembre. Calculer le taux d'évolution en pourcentage qu'il faudrait appliquer pour que le nombre de demandeurs d'emploi revienne à sa valeur initiale (à 0,01 % près).

Il s'agit du taux réciproque : $t' = \dfrac{1}{1+T} - 1 = \dfrac{1}{1,02} - 1 \approx -0,0196 \approx \boxed{-1,96\,\%}$.

VIII

Résoudre l'inéquation $\dfrac{1}{-x^2+2x+3} \geqslant 1$

- Valeurs interdites : on résout $-x^2+2x+3=0$.
  $\Delta = 3^2 - 4\times(-1)\times 3 = 4+12 = 16 > 0$.
  Il y a deux racines qui sont $x_1 = \dfrac{-2+\sqrt{16}}{-2} = \dfrac{-2+4}{-2} = -1$ et $x_2 = \dfrac{-2-4}{-2} = 3$.
- L'ensemble de définition est donc $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\,;\,3\}$.
- On suppose que $x \in \mathscr{D}$.
  L'inéquation s'écrit : $\dfrac{1}{-x^2+2x+3} \geqslant 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{-x^2+2x+3} - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-\left(-x^2+2x+3\right)}{-x^2+2x+3} \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{1+x^2-2x-3}{-x^2+2x+3} \geqslant 0$
  $\Leftrightarrow \dfrac{x^2-2x-2}{-x^2+2x+3} \geqslant 0$.
- On étudie le signe du numérateur :
  $\Delta = (-2)^2 - 4\times 1\times(-2) = 4+8 = 12 > 0$ donc il y a deux racines :
  $x_3 = \dfrac{2-\sqrt{12}}{2} = \dfrac{2-2\sqrt{3}}{2} = 1-\sqrt{3}$ et $x_4 = 1+\sqrt{3}$.
- On renseigne un tableau de signes :

x	$-\infty$	-1		$1-\sqrt{3}$		$1+\sqrt{3}$		3	$+\infty$
signe de x^2-2x-2	+	‖	+	0	−	0	+	‖	+
signe de $-x^2+2x+3$	−	‖	−		+		+	‖	−
signe de $\dfrac{1-x^2-2x-3}{-x^2+2x+3}$	−	‖	+	0	−	0	+	‖	−

- **Conclusion** : $\boxed{\mathscr{S} = \left[-1\,;\,1-\sqrt{3}\right] \cup \left[1+\sqrt{3}\,;\,3\right[}$

IX

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 4x + 3.$$

1. $x^2-4x+3 = ax^2+bx+c$ avc $\begin{cases} a=1 \\ b=-4 \\ c=3 \end{cases}$.
   $f(x) = a(x-\alpha)^2+\beta$ avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{4}{2} = 2$ et $\beta = f(2) = -1$.
   La forme canonique de $f(x)$ est $\boxed{f(x) = (x-2)^2 - 1}$.
2. On a $f(x) = (x-2)^2-1 = (x-2)^2 - 1^2 = (x-2-1)(x-2+1) = (x-3)(x-1)$ (en utilisant la troisième identité remarquable)
   On en déduit $\boxed{f(x) = (x-1)(x-3)}$.
3. Sans faire de calcul, répondre aux questions suivantes :
   (a) Pour tout x, $f(x) = (x-2)^2-1 \geqslant -1$: f admet un **minimum**.
   (b) Il est atteint pour $\boxed{x=2}$.
   (c) Ce minimum est -1.
   (d) Puisque $f(x)$ admet deux racines, on a $\boxed{\Delta > 0}$
   (e) Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont 1 et 3, en utilisant la forme factorisée.