1reES : correction du contrôle sur la dérivation

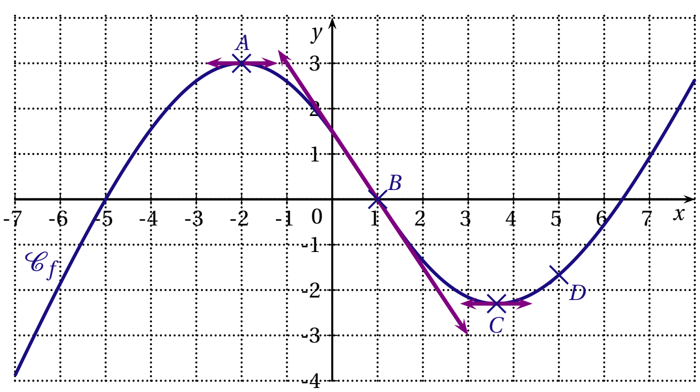
I

1. $f(x)=4x^3+5x^2-7x+5$ sur $\mathbb{R}$.
$f'(x)=4\times 3x^2+5\times 2x-7=12x^2+10x-7$; $\boxed{f'(x)=12x^2+10x-7}$

2. $f(x)=\dfrac{2x+3}{5x-1}$ sur $\left]\dfrac{1}{5}\ ;\ +\infty\right[$.
$f=\dfrac{u}{v}$ avec $\begin{cases}u(x)=2x+3\\ v(x)=5x-1\end{cases}$.
$f'=\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $\begin{cases}u'(x)=2\\ v'(x)=5\end{cases}$.
Alors $f'(x)=\dfrac{2(5x-1)-5(2x+3)}{(5x-1)^2}=\dfrac{10x-2-10x-15}{(5x-1)^2}$
$=-\dfrac{17}{(5x-1)^2}$ donc $\boxed{f'(x)=-\dfrac{17}{(5x-1)^2}}$

3. $f(x)=(3x+5)\sqrt{x}$ sur $]0\ ;\ +\infty[$. $f=uv$ avec $\begin{cases}u(x)=3x+5\\ v(x)=\sqrt{x}\end{cases}$.
$f'=(uv)'=u'v+uv'$ avec $\begin{cases}u'(x)=3\\ v'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\end{cases}$.
Alors $f'(x)=3\sqrt{x}+(3x+5)\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$=3\sqrt{x}+\dfrac{3x+5}{2\sqrt{x}}=\dfrac{3\sqrt{x}\times 2\sqrt{x}+3x+5}{2\sqrt{x}}=\dfrac{6x+3x+5}{2\sqrt{x}}$
$=\dfrac{9x+5}{2\sqrt{x}}$; $\boxed{f'(x)=\dfrac{9x+5}{2\sqrt{x}}}$

II



1. (a) La courbe admet deux tangentes parallèles à l'axe des abscisses, en A et en C, donc l'équation $f'(x)=0$ admet deux solutions.

   (b) $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 (point B). Cette tangente passe par $B(1\ ;\ 0)$ et le point de coordonnées (3; -3). Alors : $f'(1)=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$
   $=\dfrac{-3}{2}=-\dfrac{3}{2}$; $\boxed{f'(1)=-\dfrac{3}{2}}$

2. (a) La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point de coordonnées $(a\ ;\ f(a))$ a pour équation
$$y=f'(a)(x-a)+f(a).$$

   (b) La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point D d'abscisse 5 a pour équation $y=\dfrac{7}{8}x-\dfrac{145}{24}$.
   $\boxed{f'(5)=\dfrac{7}{8}}$ (coefficient directeur de la tangente).
   D appartient à la courbe et à la tangente donc ses coordonnées vérifient l'équation de la tangente.
   $y_D=5\times\dfrac{7}{8}\times-\dfrac{145}{24}=\dfrac{35}{8}-\dfrac{145}{24}=\dfrac{105-145}{24}$
   $=-\dfrac{40}{24}=-\dfrac{5}{3}$. donc $\boxed{f(5)=-\dfrac{5}{3}}$

3. Au voisinage de 0, la fonction f est décroisante sont $f'(0)<0$ donc l'affirmation. $f'(0)>1$ est fausse.

4. f est croissante sur $]-\infty\ ;\ -2]$, décroissante sur [-2; 3,5] puis de nouveau croissante, donc $f'(x)\leqslant 0$ pour $x\leqslant -2$, $f'(x)\geqslant 0$ sur [-2; 3,5] puis $f'(x)\geqslant 0$ pour $x\geqslant 3,5$.
La courbe $\mathscr{C}_1$ ne convient pas puisque la fonction correspondante est d'abord négative.
$f'(1)=-\dfrac{3}{2}$ donc $\mathscr{C}_2$ ne convient pas; c'est la courbe $\boxed{\mathscr{C}_3}$ qui est la courbe représentative de f.

III

Une entreprise fabrique chaque jour des bandes dessinées pour les enfants.
Ses moyens de production lui permettent d'en produire une quantité x comprise entre 0 et 120 unités par jour.
On a représenté en annexe la fonction coût total C et la fonction recette R, ces deux fonctions étant en euros.

Partie A : Étude graphique

1. à l'aide du graphique, compléter le tableau ci-dessous.

x	0	20	40	60	100	120
$R(x)$	0	200	400	600	1000	1200
$C(x)$	100	200	340	520	1 000	1 300
Bénéfice	-100	0	60	80	0	-100

2. Graphiquement, on trouve que le bénéfice est positif pour $\boxed{20\leqslant x\leqslant 100}$.

3. Pour une valeur de x donnée, on regarde la longueur du segment compris entre les points d'ordonnée $R(x)$ et $C(x)$.
   Ce bénéfice semble maximum pour $x \approx 60$ (voir graphique)

Partie B : Étude théorique

Les graphiques de la figure ont été obtenus à l'aide des modélisations du coût et de la recette suivantes :

$$C(x) = 0,05x^2 + 4x + 100 \quad \text{et} \quad R(x) = 10x$$

où C et R sont le coût total et la recette totale exprimés en euros et x est la production journalière comprise entre 0 et 120 unités.

1. Pour tout $x \in [0\ ;\ 120]$, $B(x) = R(x) - C(x)$
   $= 10x - \left(0,05x^2 + 4x + 100\right) = \boxed{-0,05x^2 + 6x - 100}$
2. $B(x)$ est un polynôme du second degré. On calcule le discriminant.
   $\Delta = 16 > 0$; il y a deux racines.
   $x_1 = \dfrac{-6 + \sqrt{16}}{-0,1} = \dfrac{-2}{-0,1} = \boxed{20}$
   et $x_2 = \dfrac{-6 - \sqrt{16}}{-0,1} = \dfrac{-10}{-0,1} = \boxed{100}$.
   Le bénéfice est positif (du signe opposé à celui du coefficient de x^2) entre les racines, donc pour $\boxed{x \in [20\ ;\ 100]}$, résultats que nous avions trouvés graphiquement.
3. $B'(x) = -0,1x + 6 = \boxed{-0,1(x - 60)}$.
   $B'(x) = 0$ pour $x = 60$ et $B'(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 60$.

Tableau de variation de B :

x	0		60		120
$B'(x)$		+	0	−	
$B(x)$	−100	↗	80	↘	−100

Le bénéfice est bien **maximum** pour $\boxed{x = 60}$