1^{re}ES1 : contrôle sur le second degré
(sujet A)

I

Soient les équations suivantes :

1. $2x^2 - 7x - 15 = 0$

   $\Delta = (-7)^2 - 4 \times 2 \times (-15) = 169 > 0$; l'équation a deux solutions :
   $x_1 = \dfrac{7 - \sqrt{169}}{4} = \dfrac{7-13}{4} = -\dfrac{3}{2}$ et $x_2 = \dfrac{7+\sqrt{169}}{4} = 5$.

   $\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\dfrac{3}{2}\ ;\ 5\right\}}$

2. $4x^2 - 28x + 49 = 0$.

   On peut aussi calculer $\Delta = 0$; il n'y a alors qu'une solution : $x = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{28}{8} = \dfrac{7}{2}$

   On remarque que $4x^2 - 28x + 49$
   $= (2x)^2 - 2 \times 2x \times 7 + 7^2 = (2x-7)^2$.

   L'équation s'écrit : $(2x-7)^2$ donc $x = \dfrac{7}{2}$: $\boxed{\mathscr{S} = \left\{\dfrac{7}{2}\right\}}$

3. $16x^2 + 16x + 5 = 0$

   $\Delta = 16^2 - 4 \times 16 \times 5 = 256 - 320 = -64 < 0$; L'équation n'a pas de solution.

   $\boxed{\mathscr{S} = \emptyset}$.

4. $(2x+3)(x-3) = 0$.

   Un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul.

   On en déduit $\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\dfrac{3}{2}\ ;\ 3\right\}}$

5. $(2x+3)(x-5) = 2x+3$

   $(2x+3)(x-5) = 2x+3 \Leftrightarrow (2x+3)(x-5) - (2x+3) = 0 \Leftrightarrow (2x+3)[(x-5)-1] = 0 \Leftrightarrow (2x+3)(x-6) = 0$.

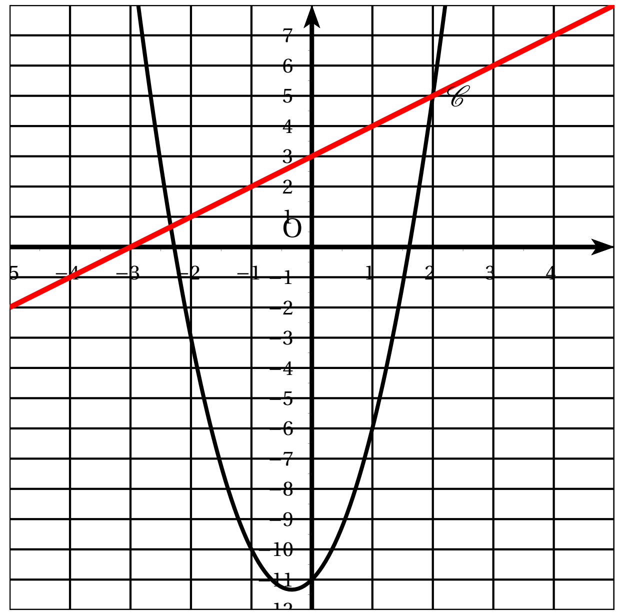
   On en déduit : $\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\dfrac{3}{2}\ ;\ 6\right\}}$

II

Soient f et g les fonctions définies par

$$f(x) = 3x^2 + 2x - 11 \text{ et } g(x) = x + 3.$$

On note $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ leurs courbes représentatives.
$\mathscr{C}$ est représentée ci-dessous.

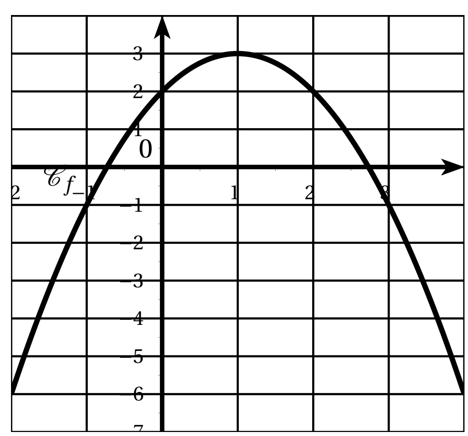


1. Représentons sur ce graphique la droite $\mathscr{D}$.
2. Graphiquement, les abscisses des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ int environ -2,3 et 2.
3. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 11 = x + 3 \Leftrightarrow 3x^2 + x - 14 = 0$.
   $\Delta = 1^2 - 4 \times 3 \times (-14) = 1 + 168 = 169 > 0$.
   Il y a bien deux solutions :
   $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{169}}{6} = \dfrac{-1-13}{6} = -\dfrac{14}{6} = -\dfrac{7}{3}$.
   $x_2 = \dfrac{-1+13}{6} = \dfrac{12}{6} = 2$.

   $\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\dfrac{7}{3}\ ;\ 2\right\}}$

4. Ces deux nombres sont les abscisses exactes des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$.

III



On a représenté sur l'intervalle [-2 ; 3] la parabole représentative d'un trinôme f du second degré.

1. On donne trois expressions en fonction de x possibles pour f. Déterminer laquelle est la bonne en justifiant soigneusement :
   La parabole est trouvée vers le bas donc le coefficient de x^2 est négatif, ce qui élimine l'expression c). La parabole passe par le point de coordonnées $(0;2)$. On a donc $\boxed{f(x) = -x^2+2x+2}$ (expression b).
2. On rappelle que la forme canonique de
   $u(x) = ax^2+bx+c$ est $a(x-\alpha)^2+\beta$ avec $\begin{cases}\alpha = -\dfrac{b}{2a} \\ \beta = u(\alpha)\end{cases}$.
   $f(x) = x^2+bx+c$ avec $a=-1$, $b=2$ et $c=2$.
   $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = 1$ et $\beta = f(\alpha) = f(1)3$ donc $\boxed{f(x) = -(x-1)^2+3}$
3. Factorisons $f(x)$:
   $f(x) = -(x-1)^2+3 = 3-(x-1)^2 = \sqrt{3}^2-(x-1)^2 = \left[\sqrt{3}-(x-1)\right]\left[\sqrt{3}+(x-1)\right]$
   $= \boxed{\left(1+\sqrt{3}-x\right)\left(x-1+\sqrt{3}\right)}$.
4. Résoudre algébriquement les équations suivantes en utilisant la forme la plus adaptée :
   (a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left(1+\sqrt{3}-x\right)\left(x-1+\sqrt{3}\right) = 0$
   $\boxed{\mathscr{D} = \left\{1-\sqrt{3}\,;\,1+\sqrt{3}\right\}}$
   (b) $f(x) = 3 \Leftrightarrow -(x-1)^2+3 = 3 \Leftrightarrow -(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
   $\boxed{\mathscr{S} = 1}$.
   (c) $f(x) = 2 \Leftrightarrow -x^2+2x+2 = 2 \Leftrightarrow -x^2+2x = 0 \Leftrightarrow x(-x+2) = 0$.
   $\boxed{\mathscr{S} = \{0\,;\,2\}}$.

IV Exercice facultatif

La somme d'un nombre et de son inverse est 5,2. Quel est ce nombre ?

Appelons x ce nombre; on doit avoir $x+\dfrac{1}{x} = 5,2$ donc $\dfrac{x^2+1}{x} = 5,2$ donc $x^2+1 = 5,2x$ qui donne $x^2-5,2x+1 = 0$.

$\Delta = 5,2^2-4 = 23,04 > 0$: il y a deux solutions.

$x_1 = \dfrac{5,2-\sqrt{23,04}}{2} = \dfrac{5,2-4,8}{2} = 0,2 = \dfrac{1}{5}$

$x_2 = \dfrac{5,2+\sqrt{23,04}}{2} = \dfrac{5,2+4,8}{2} = 5$.

Les deux nombres possibles sont $\dfrac{1}{5}$ et 5 (les deux nombres sont inverses l'un de l'autre).

1^{re}ES1 : contrôle sur le second degré
(sujet B)

I

Résoudre les équations suivantes :

1. $3x^2-10x-8=0$

   $\Delta=(-10)^2-4\times3\times(-8)=100+96=196>0$.

   Il y a deux solutions :

   $x_1=\dfrac{10-\sqrt{196}}{6}=\dfrac{10-14}{6}=-\dfrac{2}{3}$

   $x_2=\dfrac{10+\sqrt{196}}{6}=\dfrac{10+14}{6}=4$.

   $\boxed{\mathscr{S}=\left\{-\dfrac{2}{3}\ ;\ 4\right\}}$

2. $4x^2-20x+25=0$.

   $4x^2-20x+25=(2x)^2-2\times2x\times5+5^2=(2x-5)^2$ (identité remarquable).

   L'équation s'écrit : $(2x-5)^2=0$ donc a pour solution $x=\dfrac{5}{2}$: $\boxed{\mathscr{S}=\left\{\dfrac{5}{2}\right\}}$.

   Sinon : $\Delta=0$: l'équation a alors pour solution $x=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-20}{8}=\dfrac{5}{2}$

3. $36x^2+24x+7=0$.

   $\Delta=24^2-4\times36\times7=-432<0$ donc l'équation n'a pas de solution : $\boxed{\mathscr{S}=\emptyset}$

4. $(3x+2)(x-7)=0$.

   Un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul.

   On en déduit $\boxed{\mathscr{S}=\left\{-\dfrac{2}{3}\ ;\ 7\right\}}$

5. $(3x+2)(x-7)=3x+2 \Leftrightarrow (3x+2)(x-7)-(3x+2)=0 \Leftrightarrow (3x+2)[(x-7)-1]=0 \Leftrightarrow (3x+2)(x-8)=0$.

   Alors : $\boxed{\mathscr{S}=\left\{-\dfrac{2}{3}\ ;\ 8\right\}}$

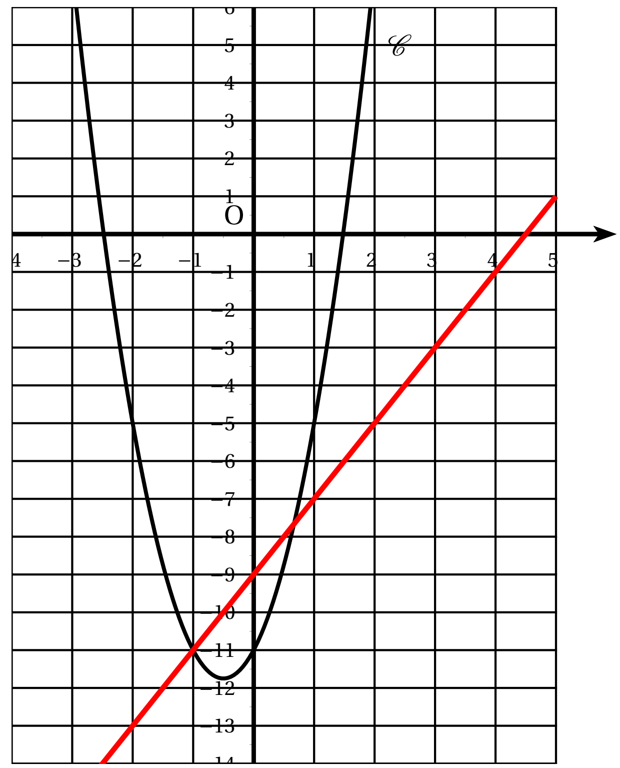
II

Soient f et g les fonctions définies par

$$f(x)=3x^2+3x-11 \text{ et } g(x)=2x-9.$$

On note $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ leurs courbes représentatives.

$\mathscr{C}$ est représentée ci-dessous.

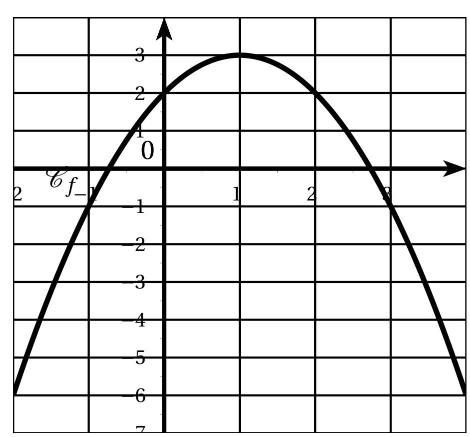


1. Représenter sur ce graphique la droite $\mathscr{D}$.
2. Graphiquement, les abscisses des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ sont environ -1 et 0,6.
3. $f(x)=g(x) \Leftrightarrow 3x^2+3x-11=2x-9 \Leftrightarrow 3x^2+x-2=0$.

   $\Delta=1^2-4\times3\times(-2)=25>0$.

   Il y a deux solutions : $x_1=\dfrac{-1-\sqrt{25}}{6}=-1$ et $x_2=\dfrac{-1+\sqrt{25}}{6}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$.
4. Ces deux solutions sont les abscisses exactes des points points d'intersection des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$.

III



On a représenté sur l'intervalle [-2 ; 3] la parabole représentative d'un trinôme f du second degré.

1. On donne trois expressions en fonction de x possibles pour f. Déterminer laquelle est la bonne en justifiant soigneusement :

   La parabole est trouvée vers le bas donc le coefficient de x^2 est négatif, ce qui élimine l'expression c). La parabole passe par le point de coordonnées $(0;2)$. On a donc $\boxed{f(x) = -x^2 + 2x + 2}$ (expression b).
2. On rappelle que la forme canonique de

   $u(x) = ax^2 + bx + c$ est $a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\begin{cases} \alpha = -\dfrac{b}{2a} \\ \beta = u(\alpha) \end{cases}$.

   $f(x) = x^2 + bx + c$ avec $a = -1$, $b = 2$ et $c = 2$.

   $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = 1$ et $\beta = f(\alpha) = f(1)3$ donc $\boxed{f(x) = -(x-1)^2 + 3}$
3. Factorisons $f(x)$:

   $f(x) = -(x-1)^2 + 3 = 3 - (x-1)^2 = \sqrt{3}^2 - (x-1)^2 = \left[\sqrt{3} - (x-1)\right]\left[\sqrt{3} + (x-1)\right]$

   $= \boxed{\left(1+\sqrt{3}-x\right)\left(x-1+\sqrt{3}\right)}$.
4. Résoudre algébriquement les équations suivantes en utilisant la forme la plus adaptée :

   (a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left(1+\sqrt{3}-x\right)\left(x-1+\sqrt{3}\right) = 0$

   $\boxed{\mathscr{D} = \left\{1-\sqrt{3}\,;\,1+\sqrt{3}\right\}}$

   (b) $f(x) = 3 \Leftrightarrow -(x-1)^2 + 3 = 3 \Leftrightarrow -(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

   $\boxed{\mathscr{S} = 1}$.

   (c) $f(x) = 2 \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 2 = 2 \Leftrightarrow -x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(-x+2) = 0$.

   $\boxed{\mathscr{S} = \{0\,;\,2\}}$.

IV Exercice facultatif

La somme d'un nombre et de son inverse est 5,2. Quel est ce nombre ?

Appelons x ce nombre; on doit avoir $x + \dfrac{1}{x} = 5{,}2$ donc $\dfrac{x^2+1}{x} = 5{,}2$ donc $x^2 + 1 = 5{,}2x$ qui donne $x^2 - 5{,}2x + 1 = 0$.

$\Delta = 5{,}2^2 - 4 = 23{,}04 > 0$: il y a deux solutions.

$x_1 = \dfrac{5{,}2 - \sqrt{23{,}04}}{2} = \dfrac{5{,}2 - 4{,}8}{2} = 0{,}2 = \dfrac{1}{5}$

$x_2 = \dfrac{5{,}2 + \sqrt{23{,}04}}{2} = \dfrac{5{,}2 + 4{,}8}{2} = 5$.

Les deux nombres possibles sont $\dfrac{1}{5}$ et 5 (les deux nombres sont inverses l'un de l'autre).