1reES : correction du devoir sur feuille no 2

I

Le tableau ci-dessous donne l'évolution du cours du pétrole brut d'un mois sur le mois précédent (au dernier jour du mois).

mois	avril	mai	juin	juillet	août	septembre
Taux en %		12,5	7,6	0,6	-15,1	
CM		1,125	1,076	1,006	0,849	1,08813
Indice		100	107,6	108,2456	91,9005	100
Cours	109,50 $	123,19 $			113,21 $	123,19 $

1. La ligne des coefficients multiplicateurs est dans le tableau. On rappelle que $C = 1 + t$ si t est le taux d'évolution.
2. Fin avril, le cours du brut était de 109,5 dollars le baril. Quel était, arrondi au dixième, le cours du brut fin mai ?
   D'avril à mai, le taux d'évolution, le coefficient multiplicateur associé au taux d'évolution. est 1,125.
   Le cours du pétrole en mai était donc de $109,50 \times 1,125 = 123,1875 \approx \boxed{123,19\$}$
3. août. On multiplie chaque indice par le coefficient multiplicateur correspondant.
   - Pour juin : $100 \times 1,076 = 107,6$
   - Pour juillet : $107,6 \times 1,006 = 108,2456$
   - Pour août : $108,2456 \times 0,849 \approx 91,9005$
4. Le taux d'évolution du cours du pétrole de mai à août 2008 est : $\dfrac{91,9005 - 100}{100} =\approx -8,0095\,\%$.
   Le cours du pétrole fin août est donc : $123,19 \times \left(1 - \dfrac{8,0095}{100}\right) \approx 113,21$
5. Le coefficient multiplicateur est C=1+t ; on doit avoir $C \times 91,9005 = 100 \approx 1,08813$ donc $C = \dfrac{100}{91,9005}$.
   On en déduit $t = C - 1 = \dfrac{100}{91,9005} - 1 \approx 0,08813 = 8,813\,\%$.
   Le cours du pétrole en septembre 2008 est alors $113,21 \times 1,08813 \approx 123,19\$$

II

1. Le coefficient multiplicateur global est $C = 1,1 \times 1,2 \times 1,3 = 1,716 = 1 + \dfrac{71,6}{100}$.
   ' Le taux d'évolution global est bien de $\boxed{71,6\,\%}$.
2. Le coefficient multiplicateur global se calcule de deux façons différentes :
   - $C = 1 - \dfrac{30}{100} = 0,7$.
   - $C = \left(1 - \dfrac{15}{100}\right) \times (1 + t) = 0,85(1 + t)$.

   On en déduit : $0,85(1 + t) = 0,7$ donc $1 + t = \dfrac{0,7}{0,85}$ d'où $t = \dfrac{0,7}{0,85} - 1 \approx -0,1765$.
   Le taux est $\boxed{t \approx -17,65\,\%}$.
3. On a $(1 + z)^2 = 1,1449$ donc $1 + z = \sqrt{1,1449} = 1,07$ doù $\boxed{t = 7\,\%}$

III

Un conseil régional a pour objectif de faire croître le parc locatif réservé aux étudiants de la région de 15 000 chambres à 20 184 chambres.

1. Soit T le taux de croissance sur la période envisagée ; on a $1 + T = \dfrac{20\,184}{15\,000}$ donc $T = \dfrac{20\,184}{15\,000} - 1 = 0,3456 = \boxed{34,56\,\%}$. Le taux de croissance à atteindre est de 34,56 %.
2. Soit t le taux annuel pour avoir une augmentation de 34,56 % en deux ans.
   On doit avoir $(1 + t)^2 = 1,3456$ donc $1 + t = \sqrt{1,3456} = 1,16$ donc $t = 0,16 = \dfrac{16}{100} = \boxed{16\,\%}$.
   Il faut une augmentation annuelle de 16 % pou atteindre les 34,56 % d'augmentation en deux ans.

IV

Résoudre l'inéquation $\dfrac{-2x^2+4x-5}{-4x+3} \geqslant 0$. (on commencera par trouver l'ensemble de définition)

- Ensemble de définition : on doit avoir $-4x+3 \neq 0$.
  $-4x+3=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{4}$; le valeur $\dfrac{3}{4}$ est interdite. L'ensemble de définition est $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{3}{4}\right\}$.
- On doit ensuite chercher le signe du numérateur et celui du dénominateur puis renseigner un tableau de signes pour obtenir le signe du quotient.
- Signe de $-2x^2+4x-5$: $\Delta=4^2-4\times(-2)\times(-5)=-24<0$.
  $\Delta<0$ donc $-2x^2+4x-5$ est du signe du coefficient de x^2 pour tout x, soit -2, donc négatif pour tout x.
- **Tableau de signes** :

x	$-\infty$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
Signe de $-2x^2+4x-5$		$-$	|	$-$	
$-4x+3$		$+$	|	$-$	
$\dfrac{-2x^2+4x-5}{-4x+3}$		$-$	||	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\boxed{\mathscr{S}=\left]\frac{3}{4}\,;\,+\infty\right[}$

V

On considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=-x^2+x+2$$

.

1. Après calcul du discriminant, on trouve deux racines -1 et 2.
2. On en déduit $f(x)=-x^2+x-2=\boxed{-(x+1)(x-2)}$
3. $f(x)$ est un trinôme du second degré avec deux racines; il est négatif du signe du coefficient de x^2, -1, à l'extérieur de l'intervalle formé par mes racines et donc positif entre les racines.
   Tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

4. L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x)>0$ est $\boxed{\mathscr{S}]-1\,;\,2[}$.
5. Le sommet S de la parabole représentative de f est $S(\alpha\,;\,\beta)$.
   $\alpha=-\dfrac{1}{2\times(-1)}=\dfrac{1}{2}$ et $\beta=f(\alpha)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{9}{4}$.
   Le coefficient de x^2 est négatif, donc la fonction est d'abord croissante sur $]-\infty\,;\,\alpha]$ puis décroissante sur $[\alpha\,;\,+\infty[$.

   Tableau de variation :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{9}{4}$	$\searrow$	

6. Construire $\mathscr{C}_f$, la courbe représentative de la fonction f dans le repère de l'annexe (au dos de la feuille) (on fera apparaitre clairement le sommet et les racines).
7. Résoudre l'équation $x^2+2x-3=0$
   $\Delta=16>0$; l'équation a deux solutions, -3 et 1. $\boxed{\mathscr{S}=\{-3\,;\,1\}}$.
8. Le sommet S' de la parabole $\mathscr{C}_g$ est $S'(\alpha'\,;\,\beta')$ avec $\alpha'=-\dfrac{2}{2\times1}=-1$ et $\beta'=g(\alpha')=g(-1)=-4$. $\boxed{S'(-1\,;\,-4)}$.

9. On cherche les valeurs de x telles que $f(x) \geqslant g(x)$. Ce sont les abscisses des points tels que $\mathscr{C}_f$ soit au-dessus de $\mathscr{C}_f$.
Graphiquement, on trouve $\mathscr{S} = [-1,8\ ;\ 1,3]$.

Algébriquement :
$f(x) \geqslant g(x) \Leftrightarrow -x^2 + x + 2 \geqslant x^2 + 2x - 3 \Leftrightarrow -2x^2 - x + 5 \geqslant 0$.
$\Delta = 41 > 0$; il y a deux racines :
$x_1 = \dfrac{1+\sqrt{41}}{-4} = -\dfrac{1+\sqrt{41}}{4}$ et $x_2 = -\dfrac{1-\sqrt{41}}{4}$.
$f(x) \geqslant g(x) \Leftrightarrow -2x^2 - x + 5 \geqslant 0$.

Cette expression est positive (du signe opposé à celui du coefficient de x^2) entre les racines.

L'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S} = \left[-\dfrac{1+\sqrt{41}}{4}\ ;\ -\dfrac{1-\sqrt{41}}{4}\right]}$

VI

Une entreprise fabrique chaque jour x objets avec $x \in [0\ ;\ 60]$.
Le coût total de production de ces objets, exprimé en euros, est donné par $f(x) = x^2 - 20x + 200$.

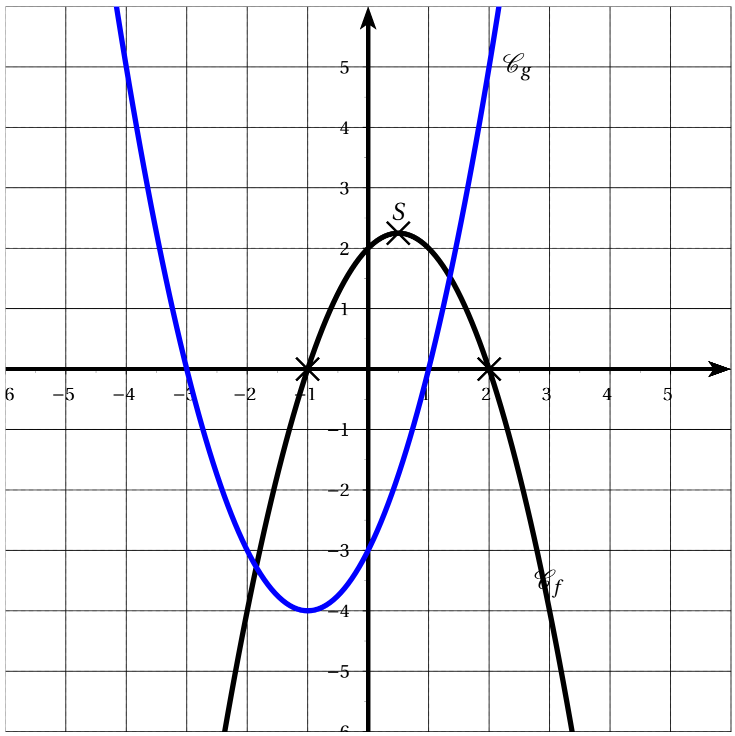
1. Le coefficient de x^2 est positif ; le sommet a pour abscisse $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = 10$ où $a =$, $b = -20$ et $x = 200$.
f est décroissante sur $[0\ ;\ 10]$ et croissante sur $[10\ ;\ 60]$.
Tableau de variation :

x	0		10		60
$f(x)$	200	↘	100	↗	2 600

2. La recette est $\boxed{R(x) = 34x}$.
3. Le bénéfice est $g(x) = R(x) - f(x) = 34x - \left(x^2 - 20x + 200\right) = -x^2 + 54x - 200$
4. Le coefficient de x^2 est négatif ; le maximum est atteint pour $x = \dfrac{-54}{-2} = 27$; g est croissante sur $[0 ; 27]$ puis décroissante sur $[27 ; 60]$ car le sommet a pour abscisse $-\dfrac{54}{2 \times (-1)} = 27$.
5. La quantité à produire permettant à l'entreprise de réaliser un bénéfice maximal est $\boxed{x = 27}$ objets.
6. $g(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow -x^2 + 54x - 200 \geqslant 0$.
$\Delta = 54^2 - 4 \times (-1) \times (-200) = 2\,116 = \sqrt{46} > 0$.
Il y a deux racines : $x_1 = \dfrac{-54+46}{-2} = 4$ et $x_2 = \dfrac{-54-46}{-2} = 50$.
Puisque le coefficient de x^2 est négatif, $g(x) \geqslant 0$ (du signe opposé à celui de ce coefficient) entre les racines, donc pour $x \in [4\ ;\ 50]$.
7. Sur le deuxième graphique de l'annexe (au dos de la feuille), on a tracé $\mathscr{C}_f$, la courbe représentative de la fonction f.
On cherche pour quelles valeurs de x on a $R(x) \geqslant f(x)$, donc les abscisses des points pour lesquels la courbe représentative de R est au-dessus de $\mathscr{C}_f$.
On trouve que s doit appartenir à $[4\ ;\ 50]$.
8. Pour différentes valeurs de x, on trace le segment entre les points de coordonnées $(x\ ;\ f(x))$ et $(x\ ;\ R(x))$ et on cherche pour quelle valeur de x ce segment est le plus long.
9. On construit $\mathscr{C}_g$ en rouge, sur le même graphique.

ANNEXES

Annexe à l'exercice V



Annexe à l'exercice VI