1^{re}ES : contrôle sur la dérivation

On justifiera chaque réponse !

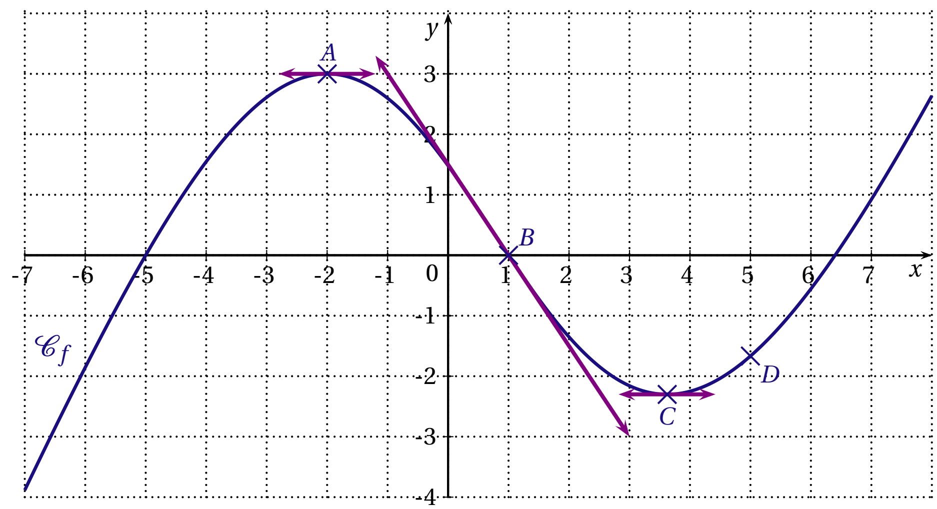
I

Pour une fonction f, on note f' la fonction dérivée de f.
Pour chacune des fonctions suivantes, donner une expression de $f'(x)$

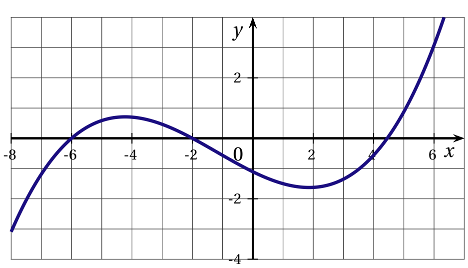
1. $f(x) = 4x^3 + 5x^2 - 7x + 5$ sur $\mathbb{R}$.
2. $f(x) = \dfrac{2x+3}{5x-1}$ sur $\left]\dfrac{1}{5}\ ;\ +\infty\right[$
3. $f(x) = (3x+5)\sqrt{x}$ sur $]0\ ;\ +\infty[$. (Simplifier l'expression trouvée au maximum).

II

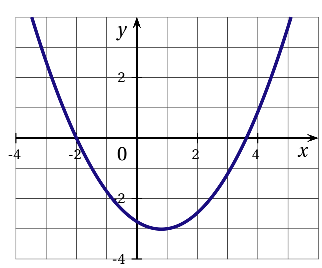
Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' la dérivée de la fonction f.
On donne ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f.
La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B passe par le point de coordonnées $(3;-3)$.



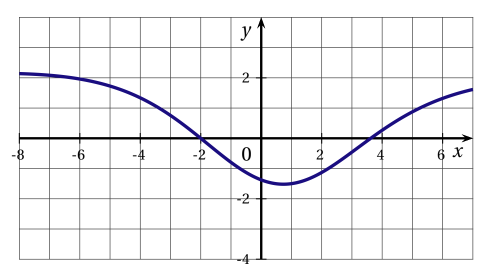
1. À partir du graphique et des données de l'énoncé :
   (a) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f'(x) = 0$.
   (b) Déterminer $f'(1)$.
2. (a) Rappeler la formule donnant l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point de coordonnées $(a\ ;\ f(a))$.
   (b) La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point D d'abscisse 5 a pour équation $y = \dfrac{7}{8}x - \dfrac{145}{24}$.
   En déduire les valeurs de $f'(5)$ puis $f(5)$.
3. La proposition « $f'(0) > 1$ » est-elle vraie ou fausse ?
4. Une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f'. Déterminer laquelle.



Courbe $\mathscr{C}_1$



Courbe $\mathscr{C}_2$



Courbe $\mathscr{C}_3$

III

Une entreprise fabrique chaque jour des bandes dessinées pour les enfants.
Ses moyens de production lui permettent d'en produire une quantité x comprise entre 0 et 120 unités par jour.
On a représenté en annexe la fonction coût total C et la fonction recette R, ces deux fonctions étant en euros.

Partie A : Étude graphique

1. à l'aide du graphique, compléter le tableau ci-dessous.

x	0	20	40	60	100	120
$R(x)$						
$C(x)$						
Bénéfice						

2. Déterminer, graphiquement, l'ensemble des productions permettant d'obtenir un bénéfice positif.

3. En expliquant votre manière de procéder, déterminer graphiquement pour quelle production le bénéfice semble maximal.

Partie B : Étude théorique

Les graphiques de la figure ont été obtenus à l'aide des modélisations du coût et de la recette suivantes :

$$C(x) = 0,05x^2 + 4x + 100 \quad \text{et} \quad R(x) = 10x$$

où C et R sont le coût total et la recette totale exprimés en euros et x est la production journalière comprise entre 0 et 120 unités.

1. Vérifier que le bénéfice B est donné, exprimé en euros, par $B(x) = -0,05x^2 + 6x - 100$ où x est compris entre 0 et 120 unités.

2. Étudier le signe de $B(x)$ selon les valeurs de x pour x compris entre 0 et 120 unités.
Retrouve-t-on les résultats de la partie A ?

3. Calculer $B'(x)$, la fonction dérivée de B, étudier son signe puis dresser le tableau des variations de la fonction B en y indiquant les valeurs extrêmes.
Retrouve-t-on les résultats de la partie A ?