Feuille d'exercices (variations)

I

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 + x - 10.$$

1. Calculer $f'(x)$ puis démontrer que f est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $f(2)$.
3. En déduire le signe de f sur $\mathbb{R}$.

II

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 - 3x - 18.$$

1. Calculer $f'(x)$ puis étudier le sens de variation de f.
2. Déterminer le signe de $f(x)$ sur $]-\infty\,;\,1]$.
3. (a) Vérifier que f s'annule en 3.
   (b) Déterminer le signe de $f(x)$ sur $[1\,;\,+\infty[$.
   (c) Sur quel intervalle a-t-on $x^3 \leqslant 3x + 18$?

III

Dans une entreprise qui produit du savon liquide, une étude a permis de modéliser le coût moyen de production d'un hectolitre de savon lorsque x hectolitres sont produits. Ce coût moyen de production est modélisé par la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 0,5x + \frac{8}{x}.$$

Il est exprimé en milliers d'euros. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative de f dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.

1. (a) Calculer la dérivée de f.
   (b) Expliquer pourquoi $f'(x)$ a le même signe que $x - 4$.
2. Déterminer le sens de variation de f et construire $\mathscr{C}$.
3. Le prix de vente $p(x)$ de l'hectolitre dépend de la quantité vendue :

$$p(x) = 0,8x + 13.$$

   avec $p(x)$ en milliers d'euros et x en hectolitres.
   (a) Tracer la représentation graphique de p dans le même repère que $\mathscr{C}$.
   (b) Déterminer graphiquement l'intervalle dans lequel doit se situer la production pour que l'entreprise soit bénéficiaire.
4. Retrouver par le calcul les résultats de la question 3.(b)

IV Position d'une courbe et d'une tangente

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$ orthonormé d'unité 2 cm.

1. Caculer $f'(x)$.
2. Étudier le sens de variation de f et construire son tableau de variation sur $[-1\,;\,3]$.
3. Déterminer une équation de la tangente (T) à cette courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.
4. Soit g la fonction définie par

$$g(x) = f(x) - (-3x + 2).$$

   (a) Justifier que g est croissante sur $\mathbb{R}$.
   (b) Calculer $g(1)$.
   (c) En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
   (d) Sur quel intervalle a-t-on $f(x) \geqslant -3x + 2$? Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$ et la tangente (T) ?
5. Construire la courbe $\mathscr{C}$, la tangnte (T) et les tangentes à $\mathscr{C}$ aux points d'abscisses 0 et 2.