Équations du second degré

Forme canonique

On a vu en Seconde que :

Résolution de l'équation $ax^2+bx+c=0$

Forme canonique

On a vu en Seconde que :

$ax^2+bx+c=a(x+\alpha)+\beta$

avec $\alpha=-\dfrac{b}{2a}$ et $\beta=f(\alpha)$ en posant $f(x)=ax^2+bx+c$.

Résolution de l'équation $ax^2+bx+c=0$

Forme canonique

On a vu en Seconde que :

$ax^2+bx+c=a(x+\alpha)+\beta$
avec $\alpha=-\dfrac{b}{2a}$ et $\beta=f(\alpha)$ en posant $f(x)=ax^2+bx+c$.

On trouve :

$$f(\alpha)=f\left(-\frac{b}{2a}\right)$$

$$=a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2+b\times\left(-\frac{b}{2a}\right)+c$$

$$= a \times \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$= a \times \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$= \frac{-b^2 + 4ac}{4a}.$$

$$= a \times \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$= \frac{-b^2 + 4ac}{4a}.$$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$. (qu'on apelle discriminant).

$$= a \times \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$= \frac{-b^2 + 4ac}{4a}.$$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$. (qu'on apelle discriminant).

On en déduit :

$$= a \times \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$= \frac{-b^2 + 4ac}{4a}.$$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$. (qu'on apelle discriminant).

On en déduit :

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

$$= a \times \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$= \frac{-b^2 + 4ac}{4a}.$$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$. (qu'on apelle discriminant).

On en déduit :

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

En simplifiant par a non nul, L'équation s'écrit :

En simplifiant par a non nul, L'équation s'écrit :

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0.$$

En simplifiant par a non nul, L'équation s'écrit :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0.$$

On voit que la résolution de l'équation dépend du signe de Δ :

Premier cas

Premier cas

$\Delta < \mathbf{0}$:

Premier cas

$\Delta < \mathbf{0}$:

Alors :

$\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}=\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\left(\dfrac{-\Delta}{4a^2}\right)>0$ (car le premier terme étant le carré d'un nombre réel, il est positif ou nul et le second terme est strictement positif)

Premier cas

$\Delta < \mathbf{0}$:

Alors :

$\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2} = \left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 + \left(\dfrac{-\Delta}{4a^2}\right) > 0$ (car le premier terme étant le carré d'un nombre réel, il est positif ou nul et le second terme est strictement positif)

donc l'équation n'a pas de solution.

Premier cas

$\Delta < \mathbf{0}$:

Alors :

$\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2} = \left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 + \left(\dfrac{-\Delta}{4a^2}\right) > 0$ (car le premier terme étant le carré d'un nombre réel, il est positif ou nul et le second terme est strictement positif)

donc l'équation n'a pas de solution.

$$\mathscr{S} = \emptyset$$

Second cas $\Delta = 0$:

L'équation devient : $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$ qui a pour solution : $x = -\frac{b}{2a}$.

Second cas $\Delta = 0$:

L'équation devient : $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = 0$ qui a pour solution : $x = -\dfrac{b}{2a}$.

$$\mathscr{S} = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$$

Second cas $\Delta = 0$:

L'équation devient : $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = 0$ qui a pour solution : $x = -\dfrac{b}{2a}$.

$$\mathscr{S} = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$$

Remarque : on a alors $ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$

Troisième cas : $\Delta > 0$:

Troisième cas : $\Delta > 0$:

$\dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$:

$\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}$ est alors la différence de deux carrés donc on peut utiliser la troisième identité remarquable :

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2=0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left[(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right]\left[(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right]=0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left[(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right]\left[(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[(x-\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right]\left[(x-\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right]=0.$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left[(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right]\left[(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[(x-\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right]\left[(x-\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right]=0.$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul :

L'équation admet alors deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

L'équation admet alors deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\mathscr{S} = \left\{ \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \,;\, \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$$

L'équation admet alors deux solutions :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$$\mathscr{S} = \left\{ \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} ; \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$$

Remarque : on a alors $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$, où x_1 et x_2 sont les deux solutions.

Résumé :

Résumé :

Signe de Δ	Nombre de solutions	Solutions
$\Delta < 0$	pas de solution	$\mathscr{S} = \emptyset$
$\Delta = 0$	une solution	$\mathscr{S} = \left\{ -\dfrac{b}{2a} \right\}$
$\Delta > 0$	deux solutions	$\mathscr{S} = \left\{ \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \; ; \; \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$

Exemples d'application

Exemples d'application

Résoudre l'équation $3x^2 + 5x - 2 = 0$.

Exemples d'application

Résoudre l'équation $3x^2 + 5x - 2 = 0$.

C'est une équation du type $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 3$, $b = 5$ et $c = -2$.

Exemples d'application

Résoudre l'équation $3x^2 + 5x - 2 = 0$.

C'est une équation du type $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 3$, $b = 5$ et $c = -2$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 25 + 24 = 49 > 0$.

Exemples d'application

Résoudre l'équation $3x^2 + 5x - 2 = 0$.

C'est une équation du type $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 3$, $b = 5$ et $c = -2$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 25 + 24 = 49 > 0$.

L'équation a donc deux solutions : $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-5 - 7}{6} = -2$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-5 + 7}{6} = \dfrac{1}{3}$

Exemples d'application

Résoudre l'équation $3x^2 + 5x - 2 = 0$.

C'est une équation du type $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 3$, $b = 5$ et $c = -2$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 25 + 24 = 49 > 0$.

L'équation a donc deux solutions : $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-5 - 7}{6} = -2$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-5 + 7}{6} = \dfrac{1}{3}$

$\mathscr{S} = \left\{ -2 \,;\, \dfrac{1}{3} \right\}$

Résoudre l'équation : $3x^2 + 30x + 75 = 0$.

Résoudre l'équation : $3x^2 + 30x + 75 = 0$.

L'équation est de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 3$, $b = 30$ et $c = 75$

$\Delta = 30^2 - 4 \times 3 \times 75 = 0$

Résoudre l'équation : $3x^2 + 30x + 75 = 0$.

L'équation est de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 3$, $b = 30$ et $c = 75$

$\Delta = 30^2 - 4 \times 3 \times 75 = 0$

L'équation a une solution : $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{30}{6} = -5$

Résoudre l'équation : $3x^2 + 30x + 75 = 0$.

L'équation est de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 3$, $b = 30$ et $c = 75$

$\Delta = 30^2 - 4 \times 3 \times 75 = 0$

L'équation a une solution : $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{30}{6} = -5$

$\mathscr{S} = \{-5\}$

Résoudre l'équation : $3x^2 + 30x + 75 = 0$.

L'équation est de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 3$, $b = 30$ et $c = 75$

$\Delta = 30^2 - 4 \times 3 \times 75 = 0$

L'équation a une solution : $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{30}{6} = -5$

$\mathscr{S} = \{-5\}$

On pouvait résoudre l'équation directement en factorisant par 3, puis en reconnaissant une identité remarquable.

Résoudre l'équation : $3x^2+30x+75=0$.

L'équation est de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a=3$, $b=30$ et $c=75$

$\Delta=30^2-4\times3\times75=0$

L'équation a une solution : $-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{30}{6}=-5$

$\mathscr{S}=\{-5\}$

On pouvait résoudre l'équation directement en factorisant par 3, puis en reconnaissant une identité remarquable.

L'équation s'écrit : $3(x+5)^2=0$ donc on retrouve $\mathscr{S}=\{-5\}$

Résoudre l'équation : $x^2 + x + 2$.

Résoudre l'équation : $x^2 + x + 2$.

$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 2 = -7 < 0$.

Résoudre l'équation : $x^2 + x + 2$.

$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 2 = -7 < 0$.

Comme $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution :
$\mathscr{S} = \emptyset$

Résoudre l'équation : $x^2 + x + 2$.

$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 2 = -7 < 0$.

Comme $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution :
$\mathscr{S} = \emptyset$

Remarque : l'expression n'est alors pas factorisable