

Fonction dérivée

Table des matières

I	Nombre dérivé et tangente	1
I.1	Taux d'accroissement	1
I.2	Nombre dérivé	1
I.3	Équation de la tangente en a	2
II	Fonction dérivée	3
II.1	Fonction dérivée	3
II.2	Dérivée des fonctions usuelles	3
II.3	Dérivée d'une somme	3
II.4	Dérivée du produit d'un réel par une fonction	4
II.5	Dérivée d'une fonction polynôme	4
II.6	Dérivée d'un produit de deux fonctions	4
II.7	Dérivée de l'inverse d'une fonction	5
II.8	Dérivée d'un quotient	5
III	Sens de variation et dérivée	5
IV	Liens Internet vers le site euler pour s'entraîner	7

Activités A et B page 114

Activité 1 page 116

I Nombre dérivé et tangente

I.1 Taux d'accroissement

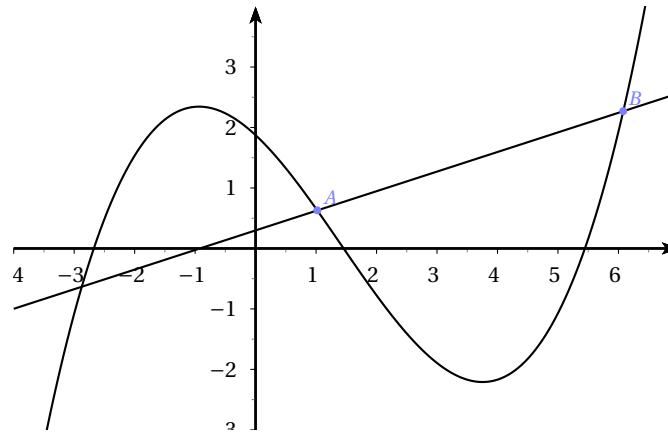


Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I ; soient $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$ deux points de la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de f .

Le taux d'accroissement de f entre a et b est le quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Exemple :



Ce taux d'accroissement est le coefficient directeur de la droite sécante (AB) à la courbe $\mathcal{C}_f$.

1.2 Nombre dérivé



Définition

On suppose $A(a; f(a))$ **fixe** et on considère un point M variable. On note $a+h$ l'abscisse de A .

Le taux d'accroissement entre a et $a+h$ est $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Si ce nombre $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ tend vers un réel quand h tend vers 0, la sécante tend vers une « croix limite » appelée tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ en a et ce nombre limite est appelé nombre dérivé de f en a .

On ne note $f'(a)$ et on écrit : $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right)$.

Remarque : $f'(a)$ est alors le **coefficient directeur de la tangente** à la courbe $\mathcal{C}_f$ en a .

Exemples :

Exemple 1 $f(x) = x^2$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = 2a + h \text{ qui tend vers } 2a \text{ quand } h \text{ tend vers } 0.$$

$$f'(a) = 2a.$$

Le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en a est $2a$.

Exemple 2 $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \frac{-\frac{h}{a(a+h)}}{h} = -\frac{1}{a(a+h)} \text{ qui tend vers } -\frac{1}{a^2} \text{ quand } h \text{ tend vers } 0.$$

$$f'(a) = -\frac{1}{a^2}$$

Le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en a est $-\frac{1}{a^2}$.

I.3 Équation de la tangente en a

La tangente en a a pour coefficient directeur le nombre $f'(a)$.

Son équation est de la forme $y = mx + p$ avec $m = f'(a)$ donc $y = f'(a)x + p$.

La droite passe par le point de coordonnées $(a ; f(a))$ donc les coordonnées de ce point vérifient l'équation :

$$f(a) = f'(a)a + p.$$

$$p = -f'(a)a + f(a)$$

On en déduit : $y = f'(a)x - f'(a)a + f(a) = f'(a)(x - a) + f(a)$.



Propriété

L'équation réduite de la tangente en a à la courbe $\mathcal{C}_f$ est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

Exercices n° 1 ; 2 ; 3 page 119

II Fonction dérivée

II.1 Fonction dérivée

Exemple : soit $f : x \mapsto x^2$.

Pour chaque nombre a , on peut calculer le nombre dérivé $f'(a) = 2a$.

À chaque valeur de a , on peut associer le nombre dérivé $f'(a) = 2a$.

On définit ainsi une fonction $f' : a \mapsto f'(a)$.



Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et admettant en chaque valeur a de I un nombre dérivé $f'(a)$.

On appelle fonction dérivée de f la fonction $f' : x \mapsto f'(x)$

Exemples :

- Si $f : x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$, alors $f' : x \mapsto 2x$
- Si $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $] -\infty ; 0[$ ou sur $]0 ; +\infty[$, alors $f' : x \mapsto -\frac{1}{x^2}$

II.2 Dérivée des fonctions usuelles

Fonction f	Fonction dérivée f'
$f(x) = k, k \in \mathbb{R}$ (fonctions constantes)	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax + b$ (fonctions affines)	$f'(x) = a$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N} (n \geq 2)$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$
$f(x) = \sqrt{x} (x \geq 0)$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0$

Exemples :

- $f(x) = x^3$; $f(x) = x^n$ avec $n = 3$ donc $f'(x) = nx^{n-1} = 3x^2$
- $f(x) = x^7$; $f(x) = x^n$ avec $n = 7$: $f'(x) = nx^{n-1} = 7x^6$ donc $f'(x) = 7x^6$
- $f(x) = \frac{1}{x^5} = \frac{1}{x^n}$ avec $n = 5$ donc $f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}} = -\frac{5}{x^6}$

II.3 Dérivée d'une somme



Propriété

Soient f et g deux fonctions définies et dérivables sur un même intervalle I .
Alors $f + g$ est dérivable et $(f + g)' = f' + g'$

Exemple : $u(x) = x^5 + x^2$; $u = f + g$ avec $f(x) = x^5$ et $g(x) = x^2$.
 $u' = (f + g)' = f' + g'$ avec $f'(x) = 5x^4$ et $g'(x) = 2x$.
On en déduit $u'(x) = 5x^4 + 2x$.

II.4 Dérivée du produit d'un réel par une fonction



Propriété

Soit k un réel et soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .
Alors kf est dérivable sur I et $(kf)' = kf'$.

Exemples :

1. $f(x) = 2x^5$; $f = ku$ avec $k = 2$ et $u(x) = x^5$.
 $f' = ku'$ avec $u'(x) = 5x^4$ donc $f'(x) = 2 \times 5x^4$ d'où $f'(x) = 10x^4$.

II.5 Dérivée d'une fonction polynôme

Exemple : Soit $f : x \mapsto 3x^5 + 7x^2 + 2x - 1$.

On peut voir f comme $f = 3u - 7v + 2w - t$ avec $u(x) = x^5$, $v(x) = x^2$, $w(x) = x$ et $t(x) = 1$.

On a vu que la dérivée d'une somme est la somme des dérivées et en appliquant la propriété sur la dérivée d'une constante multipliée par une fonction, on obtient :

$$f' = 3u' - 7v' + 2w' - t' \text{ avec } u'(x) = 5x^4, v'(x) = 2x, w'(x) = 1 \text{ et } t'(x) = 0.$$

On en déduit $f'(x) = 3 \times 5x^4 - 7 \times 2x + 2 \times 1 - 0$ donc $f'(x) = 15x^4 - 14x + 2$

II.6 Dérivée d'un produit de deux fonctions



Propriété

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un même intervalle I , alors $u \times v$ est dérivable sur I et

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Exemples

a) $f(x) = (7x - 5)(2x + 3)$; $f = uv$ avec $u(x) = 7x - 5$ et $v(x) = 2x + 3$.

$$f' = (uv)' = u'v + uv' \text{ avec } u'(x) = 7 \text{ et } v'(x) = 2.$$

$$\text{On en déduit } f'(x) = 7(2x + 3) + (7x - 5) \times 2 = 7(2x + 3) + 2(7x - 5) = 14x + 21 + 14x - 10 = 28x + 11.$$

b) $f(x) = (2x + 3)\sqrt{x}$; $f = uv$ avec $u(x) = 2x + 3$ et $v(x) = \sqrt{x}$.

$$f' = u'v + uv' \text{ avec } u'(x) = 2 \text{ et } v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$\text{Alors } f'(x) = 2\sqrt{x} + (2x + 3) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{(2\sqrt{x})^2 + 2x + 3}{2\sqrt{x}} = \frac{4x + 2x + 3}{2\sqrt{x}} = \frac{6x + 3}{2\sqrt{x}} = \frac{3(2x + 1)}{2\sqrt{x}}$$

II.7 Dérivée de l'inverse d'une fonction



Propriété

Soit u ne fonction dérivable sur un intervalle I et ne s'annulant pas.

Alors $\frac{1}{u}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$.

Exemple

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1} \text{ sur } \mathbb{R} : f = \frac{1}{u} \text{ avec } u(x) = x^2 + x + 1 \text{ qui ne s'annule pas sur } \mathbb{R}.$$

$$f' = \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2} \text{ avec } u'(x) = 2x + 1.$$

Par conséquent : $f'(x) = -\frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}$

II.8 Dérivée d'un quotient

Propriété

Soient u et v deux fonction dérivables sur I , v ne s'annulant pas sur I .

Alors $\frac{u}{v}$ est dérivable et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Exemple :

$$f(x) = \frac{2x+3}{7x-1} \text{ sur } \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{7} \right\}.$$

$$f = \frac{u}{v} \text{ avec } u(x) = 2x+3 \text{ et } v(x) = 7x-1.$$

$$f' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \text{ avec } u'(x) = 2 \text{ et } v'(x) = 7.$$

$$\text{Par conséquent : } f'(x) = \frac{2(7x-1) - 7(2x+3)}{(2x+3)^2} = \frac{14x-2-14x-21}{(2x+3)^2} = \boxed{-\frac{23}{(2x+3)^2}}$$

III Sens de variation et dérivée

Théorème

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

- Si f' est strictement positive (en s'annulant éventuellement en des points isolés), alors f est croissante.
- Si $f' = 0$ sur I , alors f est constante sur I .
- Si f' est strictement négative (en s'annulant éventuellement en des points isolés), alors f est décroissante.

Exemples :

1. $f : x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$; $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ ($f'(x) = 0$ pour $x = 0$).

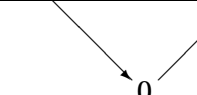
f est donc croissante sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}_f$ admettant une tangente horizontale en 0

Tableau de variation :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$		

2. Soit $f = x \mapsto x^2$: $f'(x) = 2x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$

On en déduit le tableau de variation

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	$\emptyset$	+
$f(x)$			

3. Soit $f : x \mapsto x^3 + 5x^2 + 3x - 1$ sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 3x^2 + 10x + 3$$

Étudions le signe : $\Delta = 100 - 36 = 64 > 0$. Il y a deux racines : -3 et $-\frac{1}{3}$.

Le coefficient de x^2 est 3, positif, donc $3x^2 + 10x + 3$ est positif (du signe de 3) sur $] -\infty ; -3] \cup \left[-\frac{1}{3} ; +\infty \right[$ et négatif sur $\left[-3 ; -\frac{1}{3} \right]$.

On en déduit le tableau de variation :

x	$-\infty$	-3	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$		
$3x^2 + 10x + 3$		+	0	-	0	+
$f(x)$						

IV Liens Internet vers le site euler pour s'entraîner

Exercices guidés :

- Calculer la fonction dérivée d'une fonction polynôme en indiquant les propriétés utilisées
- Calculer la fonction dérivée de l'inverse d'une fonction polynôme en indiquant les propriétés utilisées
- Calculer la fonction dérivée d'une fonction rationnelle en indiquant les propriétés utilisées
- Calculer la fonction dérivée du produit d'une fonction polynôme et de la fonction racine carrée en indiquant les propriétés utilisées
- Calculer la fonction dérivée du produit de deux fonctions polynômes en indiquant les propriétés utilisées
- Calculer la fonction dérivée d'une fonction homographique en indiquant les propriétés utilisées

Générateur d'exercices (cliquer sur format .pdf)

- Expression algébrique de la fonction dérivée d'une fonction monôme
- Expression algébrique de la fonction dérivée d'une fonction polynôme
- Expression algébrique de la fonction dérivée de l'inverse d'une fonction polynôme
- Expression algébrique de la fonction dérivée d'une fonction rationnelle
- Expression algébrique de la fonction dérivée du produit d'une fonction polynôme et de la fonction racine carrée
- Expression algébrique de la fonction dérivée du quotient d'une fonction polynôme et de la fonction racine carrée
- Expression algébrique de la fonction dérivée du produit de deux fonctions polynômes
- Expression algébrique de la fonction dérivée d'une fonction homographique
- Expression algébrique de la fonction dérivée d'une fonction rationnelle dont le numérateur est une fonction affine
- Expression algébrique de la fonction dérivée d'une fonction rationnelle dont le numérateur est une fonction trinôme