

1^{re}ES : correction du devoir sur feuille

I

Après une hausse suivie d'une baisse d'un taux trois fois plus important que celui de la hausse, un article de sport coûte au final 92 €.

- Le coefficient multiplicateur global est $C = 1 - 30\% = 0,7$; le prix initial est donc $\frac{92}{C} = \frac{92}{0,7} \approx \boxed{131,43 \text{ €}}$.

- Soit t le taux de hausse; le taux de baisse est alors $-3t$.

Le coefficient multiplicateur global est $C = (1+t)(1-3t) = 0,7$ donc $1 - 2t - 3t^2 = 0,7 \Leftrightarrow 3t^2 + 2t - 0,3 = 0$.

$\Delta = 7,6 > 0$; il a deux solutions :

$$t_1 = \frac{-2 - \sqrt{7,6}}{6} \approx -0,792801625069674, \text{ impossible car } t > 0$$

$$\boxed{t_2 = \frac{-2 + \sqrt{7,6}}{6} \approx 0,1261}, \text{ soit environ } 12,61 \%$$

II

Résoudre :

1. $x^2 - x - 3(x-1) = 0 \Leftrightarrow x(x-1) - 3(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) = 0$; l'ensemble des solutions est alors $\mathcal{S} = \{1; 3\}$

2. $(2-3x)^2 \leq (1-x)^2 \Leftrightarrow (2-3x)^2 - (1-x)^2 \leq 0 \Leftrightarrow [(2-3x) + (1-x)][(2-3x) - (1-x)] \leq 0 \Leftrightarrow (3-4x)(1-2x) \leq 0$.

Les racines sont $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{4}$; c'est une inéquation du second degré; le coefficient de x^2 est 8, positif. L'expression est négative donc du signe posé à 8 entre les racines.

$$\boxed{\mathcal{S} = \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4} \right]}$$

III

Une entreprise développe des jeux vidéo.

Pour une quantité x , exprimée en milliers de jeux, le coût total en milliers d'euros est de :

$$C(x) = 50x - 0,1x^2 + 10 \text{ avec } x \in [0; 100].$$

La recette est alors $R(x) = 48x$.

Le bénéfice est la différence entre la recette et le coût total.

1. Le bénéfice est $B(x) = R(x) - C(x) = 48x - [50x - 0,1x^2 + 10] = 0,1x^2 - 2x - 10$; $\boxed{B(x) = 0,1x^2 - 2x - 10}$

2. L'entreprise est bénéficiaire si le bénéfice est positif.

Le discriminant vaut $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 0,1 \times (-10) = 8 > 0$.

$$\text{Les racines sont } x_1 = \frac{2 - \sqrt{8}}{0,2} = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{0,2} = \frac{1 - \sqrt{2}}{0,1} = 10(1 - \sqrt{2}) < 0 \text{ et } x_2 = 10(1 + \sqrt{2}) \approx 24,1421 > 0$$

Le coefficient de x^2 est positif, donc le bénéfice est positif à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines, donc sur $[x_2; 100]$, donc pour une fabrication comprise entre 24 143 objets et 100 000 objets.

3. $B(x) = ax^2 + bx + c = a(x + \alpha)^2 + \beta$ où $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = B(\alpha)$

$$\text{Ici : } a = 0,1; b = -2 \text{ et } x = -10 \text{ donc } \alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{0,2} = 10; \beta = B(10) = -20.$$

$$\text{On en déduit que } \boxed{B(x) = 0,1(x - 10)^2 - 20}.$$

4. Le déficit maximal est donc de 20 milliers d'euros, atteint pour $x = 10$, donc une fabrication de 10 000 objets.

5. Le bénéfice est croissant sur $[10; 100]$ donc maximum pour une fabrication de 100 000 objets et vaut 790 milliers d'euros.

IV

On considère la fonction f définie sur $] -2; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{2x^2 - x - 8}{x + 2}$$

1. (a) $f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = 2x^2 - x - 8$ et $v(x) = x + 2$.

$$f' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \text{ avec } u'(x) = 4x - 1 \text{ et } v'(x) = 1.$$

$$\text{Alors } f'(x) = \frac{(4x-1)(x+2) - (2x^2 - x - 8)}{(x+2)^2} = \frac{4x^2 + 8x - x - 2 - 2x^2 + x + 8}{(x+2)^2} = \frac{2x^2 + 8x + 6}{(x+2)^2} = \frac{2(x^2 + 4x + 3)}{(x+2)^2}.$$

- (b) 2 et $(x+2)^2 > 0$ sur l'ensemble de définition donc $f'(x)$ est du signe de $x^2 + 4x + 3$.

$$\Delta = 4 > 0; \text{ il y a deux racines : } x_1 = \frac{-4-2}{2} = -3 \text{ et } x_2 = \frac{-4+2}{2} = -1.$$

$x^2 + 4x + 3$ est un trinôme du second degré; il est positif (du signe du coefficient de x^2) pour x à l'extérieur des racines, donc sur $[-1; +\infty[$.

Tableau de variation :

x	-2	-1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$		$\searrow$ $\swarrow$ -5	

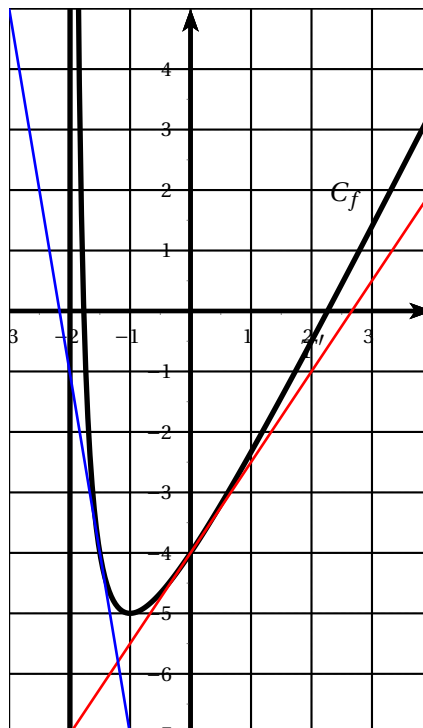
- (c) La fonction f admet un minimum, -5, atteint en $x = -1$.

2. L'équation réduite de la tangente à C_f au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Ici, $a = 0$, donc : $y = \frac{3}{2}x - 4$.

3. Ici, $a = -\frac{3}{2}$; on trouve $y = -6x - 13$

4. Courbe et tangentes :



V



Définition (élasticité)

On note p le prix d'un produit en euros et $f(p)$ la demande liée à ce produit pour le prix p . L'élasticité $E(p)$ de la demande par rapport au prix p est le pourcentage de variation de la demande pour une augmentation de 1 % du prix p .

La demande $f(p)$ d'un produit proposé à un prix $p \in [11 ; +\infty[$ (en euros) est donnée par

$$f(p) = \frac{100\,000p}{p^2 - 100}.$$

Etude de la demande

1. $f(11) = \frac{1\,100\,000}{21}$; $f(15) = 12\,000$ et $f(90) = 1\,125$.

2. $p^2 - 100 = (p - 10)(p + 10)$ donc $p^2 - 100 > 0$ pour $p > 11$ et $100\,000p > 0$ pour $p > 11$, donc $f(p) > 0$ pour $p > 11$.
 $f = 100\,000 \frac{u}{v}$ avec $u(p) = p$ et $v(p) = p^2 - 100$.

$$f' = 100\,000 \times \frac{u'v - uv'}{v^2} \text{ avec } u'(p) = 1 \text{ et } v'(p) = 2p.$$

$$\text{Alors : } f'(p) = 100\,000 \times \frac{p^2 - 100 - 2p^2}{(p^2 - 100)^2} = 100\,000 \times \frac{-p^2 - 100}{(p^2 - 100)^2} < 0 \text{ pour } p > 11 \text{ donc } f \text{ est décroissante sur } [11 ; +\infty[.$$

3. On suppose que le prix p , initialement à 15€, subit une augmentation de 1 %.

(a) Le coefficient multiplicateur associé à une hausse de 1 % est 1,01 donc le nouveau prix est $p_1 = 15 \times 1,01 = 15,15$.

$$f(15) = 12\,000; f(15,15) \approx 11\,696,81.$$

(b) L'élasticité $E(15)$ est donc $\frac{11\,696,81 - 12\,000}{12\,000} \approx -0,0252$ donc -2,52 %.

VI

La pesée automatique d'un lot de 20 barquettes d'un produit alimentaire a donné les résultats suivants :

Masse en g	300	303	307	308	309	310	311	312	313	314	315	317	318	319
Effectif	1	1	1	3	2	2	3	1	1	1	1	1	1	1

Un lot est accepté si les trois conditions sont remplies :

- le poids moyen m d'une barquette est de 310 g à 1 g près;
- l'écart type s des poids est inférieur à 5 g;
- 80 % au moins des poids sont dans l'intervalle $[m - s; m + s]$.

• La moyenne vaut : $m = \frac{6\,213}{20} = \boxed{310,65 \in [309; 311]}$

• L'écart-type est $s \approx \boxed{4,55 < 5}$ (calculé à la calculatrice)

• $[m - s; m + s] = [306,90; 315,21]$; 15 valeurs sont dans cet intervalle.

$$\frac{15}{20} = \frac{3}{4} = \boxed{75\% \leq 80\%}$$

On en déduit que ce lot n'est pas accepté.

VII

Cet exercice propose de comprendre sur un exemple, pourquoi certains objets usuels ont tous la même forme.

Pour réduire les coûts de fabrication, une entreprise doit fabriquer des casseroles cylindriques de volume v donné en utilisant le moins de métal possible. (on ne tient pas compte du manche)

On note h la hauteur d'une casserole, x le rayon du disque du fond et S l'aire totale (aire latérale + aire du fond).

1. Le volume du cylindre est $v = \pi x^2 h$ donc $h = \frac{v}{\pi x^2}$.

L'aire latérale du cylindre est celle d'un rectangle, de longueur le périmètre de la base du cylindre et de hauteur celle du cylindre, donc vaut $2\pi x h = \frac{2\pi x v}{\pi x^2} = \frac{2v}{x}$.

On en déduit que $S = \pi x^2 + \frac{2v}{x}$.

2. Soit $f : x \mapsto \pi x^2 + \frac{2v}{x}$ sur $]0 ; +\infty[$.

$$f'(x) = 2\pi x + 2v \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2\pi x - \frac{2v}{x^2} = \frac{2(\pi x^3 - v)}{x^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 = \frac{v}{\pi} \text{ donc } x = \sqrt[3]{\frac{v}{\pi}} \text{ et, comme la fonction cube est croissante, } f'(x) \leq 0 \text{ pour } x \leq \sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}.$$

Tableau de variation :

x	0	$\sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}$	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$		$f\left(\sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}\right)$	

3. Pour v fixé, la valeur de x pour laquelle le coût de fabrication d'une casserole est le plus bas est $\sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}$.

Remarque : posons $\alpha = \sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}$.

$$\text{La hauteur de la casserole est alors } h = \frac{v}{\pi \alpha^2} = \frac{v \alpha}{\pi \alpha^3} = \frac{v \alpha}{\pi \times \frac{v}{\pi}} = \alpha.$$

La casserole a alors une hauteur égale au rayon de la base. Ainsi les casseroles ont-elles toutes la même forme (hauteur égale au rayon de base) car ainsi la quantité de métal utilisé pour la fabrication est minimum.