1^{re} ES : Exercices sur la loi binomiale

I

Une chenille processionnaire descend le long d'un grillage. À chaque épissure, elle prend la maille de droite une fois sur trois, celle de gauche deux fois sur trois.
Elle descend ainsi quatre niveaux.

1. Quelle est la probabilité que la chenille ait pris trois fois la maille de droite sur les quatre niveaux ?
2. Quelle est la probabilité que la chenille ait pris trois fois la maille de gauche sur les quatre niveaux ?

II

Une entreprise dispose d'un parc de 60 ordinateurs neufs ; la probabilité que l'un d'entre eux tombe en panne sur une période d'une année est de 0,1 (période de garantie) ; la panne de l'un des ordinateurs n'affecte pas les autres machines du parc.
Quelle est la probabilité que moins de 4 appareils tombent en panne durant l'année ?

III

Sous l'hypothèse que 2 % des êtres humains sont gauchers, calculer la probabilité que parmi 100 personnes, 3 au plus soient gauchères.

IV

L'arracheur de dents arrache les dents de ses patients au hasard. Les clients ont une dent malade parmi les trente-deux qu'ils possèdent avant l'intervention des tenailles du praticien.

1. On considère les dix premiers clients : calculer la probabilité pour qu'aucun de ces dix patients n'y laisse la dent malade.
2. On considère les dix premiers clients : calculer la probabilité pour qu'au moins un de ces clients y laisse la dent malade.
3. Combien doit-il traiter de personnes pour extraire au moins une dent malade avec une probabilité supérieure à 0,6 ?

V

Dans un certain vignoble, on admet que la probabilité pour qu'un pied de vigne soit atteint d'une maladie est 0,04. On observe 60 pieds de vigne choisis au hasard dans ce vignoble. Chaque pied est considéré comme indépendant ds autres par rapport à la maladie.

On désigne par X la variable aléatoire qui compte le nombre de pieds observés qui sont atteints par la maladie.

On arrondira les résultats à 10^{-4} près.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Quelles sont les valeurs prises par X ?
3. Calculer $p(X=2)$.
4. Calculer $P(X \leqslant 2)$.
5. Calculer la probabilité que dix pieds de vigne soient atteints par la maladie.
6. Calculer la probabilité pour qu'au moins 58 pieds soient atteints par la maladie.
7. Calculer $P(X \geqslant 3)$.

VI

1. On lance trois fois un dé à jouer non pipé :
   (a) Quelle est la probabilité d'obtenir trois 5 ?
   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir une somme de 15 ?
   (c) Quelle est la probabilité d'obtenir le premier 5 au troisième lancer ?
2. On lance trois fois trois dés à jouer non pipés ; quelle est la probabilité d'obtenir trois fois une somme de 15 ?

VII

Une compagnie bancaire propose des placements sous forme de produits financiers. La banque constate que le produit de type A a intéressé 10 % de sa clientèle, par le passé.
Un sondage est effectué auprès d'un échantillon de 10 clients.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de clients dans l'échantillon ayant choisi le produit A.

a) Préciser la loi de probabilité de X. Justifier. Donner les valeurs de ses paramètres.

b) Calculer la probabilité, arrondie au centième, qu'au moins deux clients de l'échantillon aient choisi le produit A.

VIII

D'après l'Insee, la proportion de femmes dans la population française est d'environ 51,6 %.

Un observateur se place à la sortie d'une gare et note le sexe des personnes qui passent.

On admettra que la proportion de femmes dans la population qui sort de la gare est identique à la proportion de femmes dans la population française.

On peut assimiler le passage des personnes à un schéma de Bernoulli.

1. Déterminer la probabilité que les quatre premières personnes qui sortent soient toutes des hommes.
2. Déterminer la probabilité que, sur les dix premières personnes qui sortent, il y ait exactement cinq femmes.
3. (a) Compléter, en utilisant la calculatrice , le tableau suivant correspondant à la loi de probabilité du nombre N de femmes parmi les dix premières personnes qui sortent. (On donnera les résultats à 10-4 près).

n_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(N = n_i)$											

   (b) Montrer que $p(N \in [2\,;\,8]) \geqslant 95\,\%$.

IX France ES septembre 1998

Les deux questions **1.** et **2.** *peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.*

1. On envisage un jeu publicitaire sous la forme d'un QCM (questionnaire à choix multiples).
   Il comporte quatre questions et, pour chaque question, trois réponses sont possibles dont une seule exacte.
   Un joueur répond en choisissant au hasard une réponse pour chaque question.
   (a) De combien de façons différentes peut-il remplir le questionnaire ?
   (b) On nomme X la variable aléatoire égale au nombre de réponses exactes obtenues par le joueur. Donner la loi de probabilité de X.
2. Pour accroître la difficulté, on modifie le QCM : il comporte cette fois cinq questions et, pour chaque question, quatre réponses sont possibles dont une seule exacte.
   Un joueur remplit au hasard le QCM.
   La deuxième ligne du tableau ci-dessous indique les probabilités respectives pour que le joueur ait exactement 0, 1, 2, 3, 4, 5 réponses justes.

Nombre de bonnes réponses	0	1	2	3	4	5
Probabilité correspondante	$\frac{243}{1024}$	$\frac{405}{1024}$	$\frac{270}{1024}$	$\frac{90}{1024}$	$\frac{15}{1024}$	$\frac{1}{1024}$
Nombre de points obtenus					$16 - x$	20

   Il est prévu d'attribuer 4 points par réponse juste, on ne sait comment pénaliser une réponse fausse : on note x le nombre entier de points retirés au joueur par réponse fausse.

   (a) Recopier le tableau ci-dessus et compléter la dernière ligne, en indiquant dans chaque cas le nombre de points obtenus en fonction de x. On définit ainsi une variable aléatoire N égale au nombre de points obtenus par le joueur.
   (b) Exprimer l'espérance de N en fonction de x.