Taux d'évolution

Table des matières

Activités préparatoires pages 10 et 12

I Coefficient multiplicateur et taux d'évolution

Propriété

Appliquer un taux d'évolution t à un nombre revient à le multiplier par $C = 1 + t$, appelé coefficient multiplicateur.

Justification : soir x un nombre. Le montant de l'évolution est xt, donc ce nombre devient $x + xt = \boxed{x(1+t)}$.

Exemples :

- Un objet coûte 30 € ; son prix augmente de 3 %. Le coefficient multiplicateur est $C = 1 + \dfrac{3}{100} = 1{,}03$. Le prix devient $30 \times 1{,}03 = \boxed{30{,}90\text{ €}}$.
- La population d'une ville diminue de 1 %. Elle est donc multipliée par $C = 1 - \dfrac{1}{100} = 0{,}99$.
- Un prix passe de 12 € à 12,36 €. Quel est le taux d'augmentation ?
  Si C est le coefficient multiplicateur, on a $12 \times C = 12{,}36$, donc $C = \dfrac{12{,}36}{12} = 1{,}03$.
  Si t est le taux d'évolution, $C = 1 + t$ donc $t = 0{,}03 = \dfrac{3}{100}$.
  Remarque : on peut aussi calculer t en calculant $t = \dfrac{12{,}36 - 12}{12} = \dfrac{0{,}36}{12} = 0{,}03 = \dfrac{3}{100} = 3\,\%$, mais on remarque que $\dfrac{12{,}36 - 12}{12} = \dfrac{12{,}36}{12} - \dfrac{12}{12} = C - 1$ donc, en fait, c'est le même calcul !
- Une année, la population d'une ville est de 22 000 habitants. L'année suivante, elle n'est plus que de 20 900 habitants.
  Le coefficient multiplicateur est $C = \dfrac{20\,900}{22\,000} = 0{,}95$.
  Si t est le taux, $C = 1 + t$ d'où $t = C - 1 = -0{,}05 = -\dfrac{5}{100} =$. Le taux est de $\boxed{-5\,\%}$.

II Taux d'évolutions successives

II.1 Taux d'évolution global

Exemple : En 2005, un objet avait un prix de 120 €. Son prix a augmenté en un an de 3 %. L'année suivante, son prix augmenté de 2 %.
Quel est son prix ?
Le premier coefficient multiplicateur est $C_1 = 1 + 3\,\% = 1 + \dfrac{3}{100} = 1{,}03$.

En 2006, son prix vaut : $120 \times C_1 = \times \left(1 + \dfrac{3}{100}\right) = 120 \times 1{,}03 = 123{,}6$ €.

Le deuxième coefficient directeur est $C_2 = 1 + 2\,\% = 1 + \dfrac{2}{100} = 1{,}02$.

En 2007, son prix vaut : $123{,}60 \times C_2 = 120 \times 1{,}03 \times \left(1 + \dfrac{2}{100}\right) = 120 \times 1{,}03 \times 1{,}02 = 126{,}072 \approx \boxed{126{,}7\text{ €}}$. Cela revient à calculer $120 \times C$ en posant $\boxed{C = C_1 \times C_2}$
On voit que cela revient à multiplier les coefficients multiplicateurs entre eux.

Cas général

Définition

Soient $y_0, y_1, \ldots y_n$ des nombres réels strictement positifs.
$t_1, t_2, \ldots t_n$ sont les taux d'évolution successifs permettant de passer de y_1 à y_2, de y_2 à y_3, …, de y_{n-1} à y_n.

Le coefficient multiplicateur global T permettant de passer de y_0 à y_n est le produit des n coefficients.
$1 + T = (1+t_1)(1+t_2)\cdots(1+t_n)$ donc $\boxed{T = (1+t_1)(1+t_2)\cdots(1+t_n) - 1}$.

II.2 Taux d'évolution réciproque

Exemple

Un objet coûte 20 €. Son prix subit une hausse de 2 %.

1. Quel est son nouveau prix ?
2. Quel est le montant de la baisse qu'il doit subir pour retrouver sa valeur initiale ?

Réponses :

1. Le coefficient multiplicateur associé à une hausse de 2 % est $1 + 2\,\% = 1{,}02$.
   Le nouveau prix est : $20 \times 1{,}02 = 20{,}4$.
2. Soit t le taux de baisse ; le coefficient multiplicateur est alors : $1 + t$.
   On doit donc avoir : $(20 \times 1{,}02) \times (1+t) = 20$, d'où, après simplification par 20 :
   $1{,}02 \times (1+t) = 1$, et, par conséquent : $1 + t = \dfrac{1}{1{,}02}$.
   On en déduit : $\boxed{t = \dfrac{1}{1{,}02} - 1}$.
   Alors : $t \approx -0{,}01960$, soit environ $-1{,}96$ %.
   On dit que le taux d'évolution réciproque de 2 % est de $-1{,}96$ %.

Définition

Soit t le taux d'évolution subi par un nombre. On appelle taux d'évolution réciproque le taux t' qu'il faut alors appliquer pour retrouver le nombre de départ.

$$\text{On a : } t' = \frac{1}{1+t} - 1$$

Démonstration :

Soit x un nombre, qui subit un taux dévolution égal à t.
Le coefficient multiplicateur est $1 + t$, donc la nouvelle valeur est $x(1 + t)$.
On cherche alors le montant du taux d'évolution t' qui permet de retrouver la valeur x initiale.
Le coefficient multiplicateur associé est $1 + t'$.
On doit donc avoir : $[x(1 + t)] \times (1 + t') = x$.
En simplifiant par x, on obtient : $(1 + t)(1 + t') = 1$.
On en déduit : $1 + t' = \dfrac{1}{1+t}$ d'où : $\boxed{t' = \dfrac{1}{1+t} - 1}$.
t' est le **taux d'évolution réciproque** du taux t

Exemples :

1. Pour un taux $t = 3$ Ď%, on obtient $t' = \dfrac{1}{1+0,03} - 1 \approx -0,029 \approx -2,9$ Ď%.
   Le taux dévolution réciproque de 2 % est de -2,9 †%.
2. Pour un taux $t = -10$ Ď%, on obtient $t' = \dfrac{1}{1-0,1} - 1 \approx 0,111 \approx 11,1$ Ď%.
   Le taux dévolution réciproque d'une baisse de 10 % est d'environ 11,1 †%.