1reES : contrôle sur les fonctions de référence (2 h)

I (1,5 point)

a) Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-3x-10}$; il faut que le dénominateur soit non nul.

On résout l'équation $x^2-3x-10=0$; le discriminant est $\Delta = 49 > 0$. Il y a deux racines.

$x_1 = \dfrac{3-7}{2} = -2$ et $x_2 = \dfrac{3+7}{2} = 5$.

L'ensemble de définition de f est $\boxed{\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\,;\,5\}}$

b) Soit $g : x \mapsto \sqrt{x+5}$. Our que g soit définie, il faut que $x+5 \geqslant 0$ donc $x \geqslant -5$.

L'ensemble de définition de g est $\boxed{\mathscr{D}_g = [-5\,;\,+\infty[}$

c) Soit $h : x \mapsto \dfrac{1}{(x+2)(x-3)(x-7)}$; le dénominateur s'annule pour $x=-2$, $x=3$ ou $x=7$.

L'ensemble de définition est $\boxed{\mathscr{D}_h = \mathbb{R} \setminus \{-2\,;\,3\,;\,7\}}$

II (3 points)

On sait que la fonction carré est décroissante sur $]-\infty\,;\,0]$ et crissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

a) On sait que $3 \leqslant x < 7$; sur $[3\,;\,7]$, la fonction est croissante donc $3^2 \leqslant x^2 \leqslant 7^2$ d'où $\boxed{9 \leqslant x^2 \leqslant 49}$.

b) On sait que $-4 \leqslant x \leqslant -2$; sur cet intervalle, la fonction carré est décroissante, donc $(-4)^2 \geqslant x^2 \geqslant (-2)^2$, c'est-à-dire $\boxed{4 \leqslant x^2 \leqslant 16}$

c) On sait que $-3 \leqslant x \leqslant 5$.

Si $-3 \leqslant x \leqslant 0$, $0 \leqslant x^2 \leqslant 9$ car la fonction carré éest décroissante sur $[-3\,;\,0]$.

Si $0 \leqslant x \leqslant 5$, $0 \leqslant x^2 \leqslant 25$ car la fonction carré éest décroissante sur $[0\,;\,5]$.

On en déduit que, pour $-3 \leqslant x \leqslant 5$, $\boxed{0 \leqslant x^2 \leqslant 25}$

III (2 points)

Résoudre l'inéquation $\dfrac{1}{x} < \dfrac{3}{4}$.

On sait que la fonction inverse est décroisante sur $]-\infty\,;\,0]$ et sur $]0\,;\,+\infty[$.

- Pour $x<0$, $\dfrac{1}{x} < 0$ donc $\dfrac{1}{x} < \dfrac{3}{4}$, donc $[-\infty\,;\,0[$ fait partie des solutions.
- Sur $]0\,;\,+\infty[$, la fonction inverse est décroissante, donc $\dfrac{1}{x} < \dfrac{3}{4}$ équivaut à $x > \dfrac{4}{3}$.

On en déduit que l'ensemble des solutions est

$\boxed{\mathscr{S} =]-\infty\,;\,0[\cup \left]\dfrac{4}{3}\,;\,+\infty\right[}$

IV (2,5 points)

Soit f la fonction définie sur $[2\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 3\sqrt{x-2}$$

.

1. Pour que $f(x)$ soit définie, il faut que $x-2 \geqslant 0$ donc $x \geqslant 2$; l'ensemble de définition est bien $\boxed{\mathscr{D} = [2\,;\,+\infty[}$.
2. On veut montrer que f est croissante sur $[2\,;\,+\infty[$.

   Pour cela, recopier et compléter les phrases suivantes :

   Soient deux nombres x_1 et x_2 quelconques tels que $2 \leqslant x_1 \leqslant x_2$.

   Alors : $0 \leqslant x_1 - 2 \leqslant x_2 - 2$

   donc $0 = \sqrt{0} \leqslant \sqrt{x_1-2} \leqslant \sqrt{x_2-2}$ car la fonction racine carrée est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

   Par multiplication par 3, on en déduit $\boxed{0 \leqslant 3\sqrt{x_1-2} \leqslant 3\sqrt{x_2-2}}$
3. Puisque la fonction f est croissante, si $3 \leqslant x \leqslant 6$, alors $f(3) \leqslant f(x) \leqslant f(6)$ donc $\boxed{3 \leqslant f(x) \leqslant 6}$

V (2 points)

1. La fonction cube est **croissante** sur $\mathbb{R}$.
2. $1,02 < 1,03$; comme la fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$, on a $1,02^3 < 1,03^3$
3. De même, comme $-3,12 < -3,11$ et que la fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$, on a : $\boxed{(-3,12)^3 < (-3,11)^3}$

VI (2,5 points)

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1-2x^3$.

1. Soient deux nombres x_1 et x_2 quelconques de $\mathbb{R}$ avec $x_1 < x_2$.

   On obtient alors $x_1^3 < x_2^3$, donc $-2x_1^3 > -2x_2^3$ d'où, en ajoutant 1 : $\boxed{1-2x_1^3 > 1-2x_2^3}$.

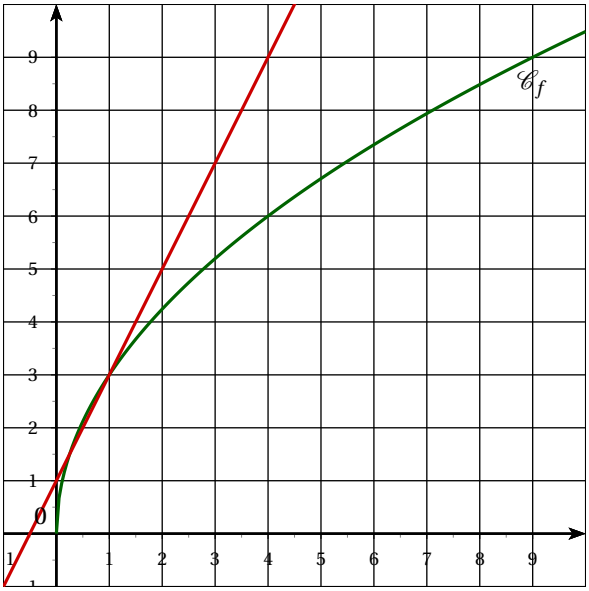
   g renverse donc l'ordre donc g est **décroissante**.
2. $g(1) = -1 < 0$ et $g(0) = 1 > 0$. $g(x)$ s'annule donc entre 0 et 1 et comme g est décroissante sur $\mathbb{R}$, la solution de l'équation $g(x) = 0$ est unique ; on la note α.
3. À la calculatrice, on trouve $\boxed{\alpha \approx 0,8}$ à 0,1 près.

VII (3,5 points)

On a représenté ci-dessous la fonction

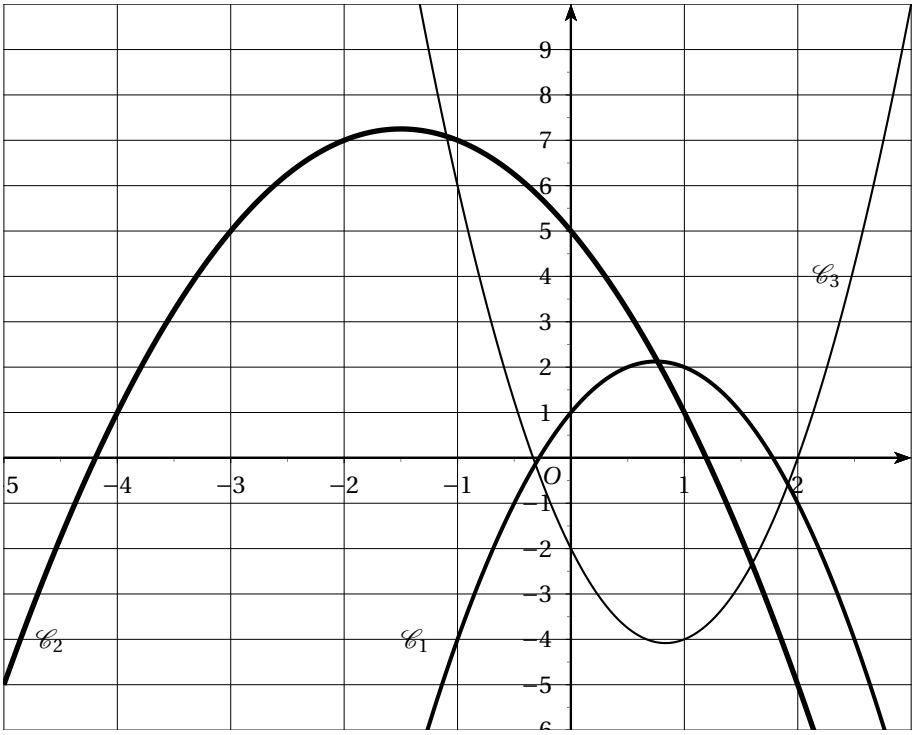
$$f = x \mapsto 3\sqrt{x}$$

.



1. Voir graphique.
2. Il semble que les courbes se coupent en deux points.
3. On pose $X = \sqrt{x}$ (donc $X \geqslant 0$). On en déduit $x = X^2$.
   L'équation $3\sqrt{x} = 2x + 1$ s'écrit alors $3X = 2X^2 + 1$ donc $2X^2 - 3X + 1 = 0$.
   Le discriminant est $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 1 > 0$; il y a deux solutions :
   $X_1 = \dfrac{3-\sqrt{1}}{4} = \dfrac{1}{2} \geqslant 0$ et $X_2 = \dfrac{3+\sqrt{1}}{4} = 1 \geqslant 0$.
   Or $x = X^2$ donc les deux solutions de l'équation sont $x_1 = X_1^2 = \dfrac{1}{4}$ et $x_2 = X_2^2 = 1^2 = 1$
4. Les points d'intersection des deux courbes ont pour coordonnées $\boxed{\left(\dfrac{1}{4}\,;\,\dfrac{3}{2}\right)}$ et $\boxed{(1\,;\,3)}$.

VIII (3 points)



Ci-dessus sont représentées trois fonctions :
$f : x \mapsto -2x^2 + 3x + 1$, $g : x \mapsto 3x^2 - 5x - 2$ et $h : x \mapsto -x^2 - 3x + 5$.

1. $\mathscr{C}_3$ est tournée vers le haut, donc le coefficient de x^2 est tourné vers le haut ; elle est la courbe représentative de g.
   $f(0) = 1$ donc a pour courbe représentative $\mathscr{C}_1$ et $h(0) = 5$ donc h a pour courbe représentative $\mathscr{C}_2$.
2. Les abscisses des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_3$ sont les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$, c'est-à-dire $3x^2 - 5x - 2 = -2x^2 + 3x + 1$ qui donne $\boxed{5x^2 - 8x - 3 = 0}$.
   $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 5 \times (-3) = 64 + 60 = 124 > 0$.
   On a deux solutions :
   $x_1 = \dfrac{8-\sqrt{124}}{10} = \dfrac{8-2\sqrt{31}}{10} = \dfrac{4-\sqrt{31}}{5}$ et $x_2 = \dfrac{4+\sqrt{31}}{2}$. Les deux abscisses sont donc $\boxed{\dfrac{4-\sqrt{31}}{5}}$ et $\boxed{\dfrac{4+\sqrt{31}}{5}}$