1reES : contrôle (variations d'une fonction, probabilités)

I

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 1.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère.

1. (a) Calculer l'expression de $f'(x)$, la dérivée de la fonction f.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$.
   (c) En déduire le tableau de variation de f.
2. (a) Donner une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2.
   (b) On souhaite étudier la position de C par rapport à T sur un intervalle. Pour cela, on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - (4x - 7)$.
   (c) Calculer g'(x)
   (d) Dresser le tableau de variation de g.
   (e) Quel est le signe de g sur l'intervalle $\left[-\frac{2}{3}\,;\,+\infty\right[$?
   (f) En déduire la position de $\mathscr{C}$ par rapport à T sur l'intervalle $\left[-\frac{2}{3}\,;\,+\infty\right[$.
   (g) Calculer $g(-2)$.
   (h) Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à T sur $\left]-\infty\,;\,-\frac{2}{3}\right]$; justifier.
3. Tracer $\mathscr{C}$ et la tangente T.

II

Une urne contient dix boules rouges, six boules bleues et une boule verte.

Un jeu consiste à tirer une boule dans l'urne ; si la boule tirée est verte, on gagne 10 € ; si une boule bleue est tirée, on gagne 5 € ; sinon, on ne gagne rien.

La participation au jeu est de 5 €.

On note X le gain algébrique d'un joueur, en euros.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer $P(X \geqslant 0)$; interpéter.
3. Calculer l'espérance de X.
4. Comment interpréter la valeur de l'espérance ?

III

X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale telle que $p(X = 4) = \binom{13}{4} \times 0,3^4 \times 0,7^9$.

Calculer $p(X = 8)$.

IV

Dans le parc informatique du conseil régional de la région PACA (Provence-Alpes-Côtes d'Azur), la probabilité qu'un ordinateur soit défaillant est égale à 0,09. on considère que les pannes informatiques sont indépendantes les unes des autres.

1. Calculer la probabilité que, dans le service comptabilité qui compte 24 ordinateurs, 3 tombent en panne.
2. Ce service peut assurer son travail si au moins trois quarts des ordinateurs fonctionnent. Quelle est la probabilité que ce service ne puisse plus assurer son travail ?