Taux d'évolution

Table des matières

Activités préparatoires pages 10 et 12

I Coefficient multiplicateur et taux d'évolution

I.1 Proportion

Exemple de calcul d'une proportion en %

Exemple : : Dauns une classe de 35 élèves, 23 sont des filles. La proportion de filles est $\dfrac{23}{35} \approx 0,6571 = \boxed{\dfrac{65,71}{100} = 65,71\,\%}$.

I.2 Taux d'évolution

Définition du taux d'évolution

L étaux d'évolution d'une quantité est $\dfrac{\text{évolution}}{\text{valeur initiale}} = \dfrac{\text{Valeur finale} - \text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}}$.

Exemple : le prix d'un objet est passé de 12€ à 15 €.
Le taux dévolution est $\dfrac{15-12}{12} = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4} = 0,25 = \dfrac{25}{100} = 25\,\%$.
Le prix a augmenté de 25 %.

I.3 Coefficient multiplicateur

Propriété

Appliquer un taux d'évolution t à un nombre revient à le multiplier par $C = 1 + t$, appelé coefficient multiplicateur.
Remarque : $C > 1$ correspond à une hausse et $0 < C < 1$ correspond à une baisse.

Justification : soit x un nombre. Il devient $x + xt = \boxed{x(1+t)}$.

Exemples :

- Un objet coûte 30 € ; son prix augmente de 3 %.

  Le coefficient multiplicateur est $C = 1 + \dfrac{3}{100} = 1,03$.

  Le prix devient $30 \times 1,03 = \boxed{30,9}$.

- La population d'une ville diminue de 1 %. Elle est donc multipliée par $C = 1 - \dfrac{1}{100} = \boxed{0,99}$.

- Un prix passe de 12 € à 12,36 €. Quel est le taux d'augmentation ?

  Si C est le coefficient multiplicateur, on a $12 \times C = 12,36$, donc $C = \dfrac{12,36}{12} = 1,03$.

  Si t est le taux d'évolution, $C = 1 + t$ donc $t = 0,03 = \dfrac{3}{100} = \boxed{3\,\%}$.

- Une année, la population d'une ville est de 22 000 habitants. L'année suivante, elle n'est plus que de 20 900 habitants.

  Le coefficient multiplicateur est $C = \dfrac{20\,900}{22\,000} = 0,95$.

  Si t est le taux, $C = 1 + t$ d'où $t = C - 1 = -0,05 = -\dfrac{5}{100} =$. Le taux d'évolution est de $\boxed{-5\,\%}$.

II Taux d'évolutions successives

II.1 Taux d'évolution global

Exemple : En 2005, un objet avait un prix de 120 €. Son prix a augmenté en un an de 3 %. L'année suivante, son prix augmenté de 2 %.
Quel est son prix ?

En 2006, son prix vaut : $120 \times \left(1 + \dfrac{3}{100}\right) = 120 \times 1,03 = 123,6$ €.
En 2007, son prix vaut : $123,6 \times 1,02 = 120 \times 1,03 \times 1,02 = 120 \times 1,03 \times 1,02 = 126,072 \approx 126,7$ €.
On voit que cela revient à multiplier les coefficients multiplicateurs entre eux.

Remarque : On constate que le coefficient multiplicateur global est le produit des coefficients multiplicateurs.

Cas général

Définition

Soient y_0, y_1, $\dots y_n$ des nombres réels strictement positifs.
y_1, y_2, $\dots y_n$ sont les taux d'évolution successifs permettant de passer de y_1 à y_2, de y_2 à y_3, ..., de y_{n-1} à y_n.

Le coefficient multiplicateur global permettant de passer de y_0 à y_n est le produit des n coefficients.
$1+T=(1+t_1)(1+t_2)\cdots(1+t_n)$ donc $\boxed{T=(1+t_1)(1+t_2)\cdots(1+t_n)-1}$.

II.2 Taux d'évolution réciproque

Exemple

Un objet coûte 20 €. Son prix subit une hausse de 2 %.

1. Quel est son nouveau prix ?
2. Quel est le taux de baisse qu'il doit subir pour retrouver sa valeur initiale ?

Réponses :

1. Le coefficient multiplicateur associé à une hausse de 2 % est $1+2\ \% = 1,02$.
   Le nouveau prix est : $20\times 1,02 = 20,4$.
2. Soit t le taux de baisse ; le coefficient multiplicateur est alors : $1+t$.
   On doit donc avoir : $(20\times 1,02)\times(1+t)=20$, d'où, après simplification par 20 :
   $1,02\times(1+t)=1$, et, par conséquent : $1+t=\dfrac{1}{1,02}$.
   On en déduit : $\boxed{t=\dfrac{1}{1,02}-1}$.
   Alors : $t\approx -0,01960$, soit environ $-1,96$ %.
   On dit que le taux d'évolution réciproque de 2 % est de $-1,96$ %.

Définition

Soit t le taux d'évolution subi par un nombre. On appelle taux d'évolution réciproque le taux t' qu'il faut alors appliquer pour retrouver le nombre de départ.

$$\text{On a : } t'=\frac{1}{1+t}-1$$

Démonstration :

Soit x un nombre, qui subit un taux dévolution égal à t.
Le coefficient multiplicateur est $1+t$, donc la nouvelle valeur est $x(1+t)$.
On cherche alors le montant du taux d'évolution t' qui permet de retrouver la valeur x initiale.
Le coefficient multiplicateur associé est $1+t'$.
On doit donc avoir : $[x(1+t)]\times(1+t')=x$.

En simplifiant par x, on obtient : $(1+t)(1+t') = 1$.

On en déduit : $1 + t' = \dfrac{1}{1+t}$ d'où : $\boxed{t' = \dfrac{1}{1+t} - 1}$.

t' est le **taux d'évolution réciproque** du taux t

Exemples :

1. Pour un taux $t = 3$ Ď%, on obtient $t' = \dfrac{1}{1+0,03} - 1 \approx -0,029 \approx -2,9$ Ď%.
   Le taux dévolution réciproque de 2 % est de -2,9 †%.
2. Pour un taux $t = -10$ Ď%, on obtient $t' = \dfrac{1}{1-0,1} - 1 \approx 0,111 \approx 11,1$ Ď%.
   Le taux dévolution réciproque d'une baisse de 10 % est d'environ 11, %.