

Équations du second degré

Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$

Forme canonique

On a vu en Seconde que :

Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$

Forme canonique

On a vu en Seconde que :

$$ax^2 + bx + c = a(x + \alpha) + \beta$$

avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$ en posant $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$

Forme canonique

On a vu en Seconde que :

$$ax^2 + bx + c = a(x + \alpha) + \beta$$

avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$ en posant $f(x) = ax^2 + bx + c$.

On trouve :

$$f(\alpha) = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$$

$$= a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b \times \left(-\frac{b}{2a}\right) + c$$

$$= a \times \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$= a \times \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$= \frac{-b^2 + 4ac}{4a}.$$

$$= a \times \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$= \frac{-b^2 + 4ac}{4a}.$$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$. (qu'on appelle discriminant).

$$= a \times \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$= \frac{-b^2 + 4ac}{4a}.$$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$. (qu'on appelle discriminant).

On en déduit :

$$= a \times \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$= \frac{-b^2 + 4ac}{4a}.$$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$. (qu'on appelle discriminant).

On en déduit :

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

$$= a \times \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$= \frac{-b^2 + 4ac}{4a}.$$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$. (qu'on appelle discriminant).

On en déduit :

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

$$a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right].$$

En simplifiant par a non nul, L'équation s'écrit :

En simplifiant par a non nul, L'équation s'écrit :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0.$$

En simplifiant par a non nul, L'équation s'écrit :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0.$$

On voit que la résolution de l'équation dépend du signe de Δ :

Premier cas

Premier cas

$\Delta < 0$:

Premier cas

$\Delta < 0$:

Alors :

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{-\Delta}{4a^2}\right) > 0$ (car le premier terme étant le carré d'un nombre réel, il est positif ou nul et le second terme est strictement positif)

Premier cas

$\Delta < 0$:

Alors :

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{-\Delta}{4a^2}\right) > 0$ (car le premier terme étant le carré d'un nombre réel, il est positif ou nul et le second terme est strictement positif)

donc l'équation n'a pas de solution.

Premier cas

$\Delta < 0$:

Alors :

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{-\Delta}{4a^2}\right) > 0$ (car le premier terme étant le carré d'un nombre réel, il est positif ou nul et le second terme est strictement positif)

donc l'équation n'a pas de solution.

$$\mathcal{S} = \emptyset$$

Second cas $\Delta = 0$:

L'équation devient : $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$ qui a pour solution : $x = -\frac{b}{2a}$.

Second cas $\Delta = 0$:

L'équation devient : $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$ qui a pour solution : $x = -\frac{b}{2a}$.

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$$

Second cas $\Delta = 0$:

L'équation devient : $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$ qui a pour solution : $x = -\frac{b}{2a}$.

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$$

Remarque : on a alors $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$

Troisième cas : $\Delta > 0$:

Troisième cas : $\Delta > 0$:

$$\frac{\Delta}{4a^2} > 0 :$$

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$ est alors la différence de deux carrés donc on peut utiliser la troisième identité remarquable :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right] \left[x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right] = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right] \left[x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[x - \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right] \left[x - \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right] = 0.$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right] \left[x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[x - \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right] \left[x - \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right] = 0.$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul :

L'équation admet alors deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

L'équation admet alors deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} ; \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$$

L'équation admet alors deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} ; \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$$

Remarque : on a alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, où x_1 et x_2 sont les deux solutions.

Résumé :

Résumé :

Signe de Δ	Nombre de solutions	Solutions
$\Delta < 0$	pas de solution	$\mathcal{S} = \emptyset$
$\Delta = 0$	une solution	$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$
$\Delta > 0$	deux solutions	$\mathcal{S} = \left\{ \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} ; \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$

Exemples d'application

Exemples d'application

Résoudre l'équation $3x^2 + 5x - 2 = 0$.

Exemples d'application

Résoudre l'équation $3x^2 + 5x - 2 = 0$.

C'est une équation du type $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 3$, $b = 5$ et $c = -2$.

Exemples d'application

Résoudre l'équation $3x^2 + 5x - 2 = 0$.

C'est une équation du type $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 3$, $b = 5$ et $c = -2$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 25 + 24 = 49 > 0.$$

Exemples d'application

Résoudre l'équation $3x^2 + 5x - 2 = 0$.

C'est une équation du type $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 3$, $b = 5$ et $c = -2$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 25 + 24 = 49 > 0.$$

L'équation a donc deux solutions : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - 7}{6} = -2$

$$\text{et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 + 7}{6} = \frac{1}{3}$$

Exemples d'application

Résoudre l'équation $3x^2 + 5x - 2 = 0$.

C'est une équation du type $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 3$, $b = 5$ et $c = -2$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 25 + 24 = 49 > 0.$$

L'équation a donc deux solutions : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - 7}{6} = -2$

$$\text{et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 + 7}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ -2 ; \frac{1}{3} \right\}$$

Résoudre l'équation : $3x^2 + 30x + 75 = 0$.

Résoudre l'équation : $3x^2 + 30x + 75 = 0$.

L'équation est de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 3$, $b = 30$ et $c = 75$

$$\Delta = 30^2 - 4 \times 3 \times 75 = 0$$

Résoudre l'équation : $3x^2 + 30x + 75 = 0$.

L'équation est de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 3$, $b = 30$ et $c = 75$

$$\Delta = 30^2 - 4 \times 3 \times 75 = 0$$

L'équation a une solution : $-\frac{b}{2a} = -\frac{30}{6} = -5$

Résoudre l'équation : $3x^2 + 30x + 75 = 0$.

L'équation est de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 3$, $b = 30$ et $c = 75$

$$\Delta = 30^2 - 4 \times 3 \times 75 = 0$$

L'équation a une solution : $-\frac{b}{2a} = -\frac{30}{6} = -5$

$$\mathcal{S} = \{-5\}$$

Résoudre l'équation : $3x^2 + 30x + 75 = 0$.

L'équation est de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 3$, $b = 30$ et $c = 75$

$$\Delta = 30^2 - 4 \times 3 \times 75 = 0$$

L'équation a une solution : $-\frac{b}{2a} = -\frac{30}{6} = -5$

$$\mathcal{S} = \{-5\}$$

On pouvait résoudre l'équation directement en factorisant par 3, puis en reconnaissant une identité remarquable.

Résoudre l'équation : $3x^2 + 30x + 75 = 0$.

L'équation est de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 3$, $b = 30$ et $c = 75$

$$\Delta = 30^2 - 4 \times 3 \times 75 = 0$$

L'équation a une solution : $-\frac{b}{2a} = -\frac{30}{6} = -5$

$$\mathcal{S} = \{-5\}$$

On pouvait résoudre l'équation directement en factorisant par 3, puis en reconnaissant une identité remarquable.

L'équation s'écrit : $3(x + 5)^2 = 0$ donc on retrouve

$$\mathcal{S} = \{-5\}$$

Résoudre l'équation : $x^2 + x + 2$.

Résoudre l'équation : $x^2 + x + 2$.

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 2 = -7 < 0.$$

Résoudre l'équation : $x^2 + x + 2$.

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 2 = -7 < 0.$$

Comme $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution :

$$\mathcal{S} = \emptyset$$

Résoudre l'équation : $x^2 + x + 2$.

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 2 = -7 < 0.$$

Comme $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution :

$$\mathcal{S} = \emptyset$$

Remarque : l'expression n'est alors pas factorisable