1re ES-L : Probabilités discrètes

Table des matières

I Vocabulaire

I.1 Expérience aléatoire

Définition

On appelle expérience aléatoire une expérience liée au hasard, dont on connaît les résultats, mais dont on ne sait pas à l'avance lequel de ces résultats va survenir.

Exemple : on lance une pièce de monnaie. On sait que l'on va obtenir Pile ou Face.
Si l'on lance un dé, on va obtenir un entier entre 1 et 6.

I.2 Univers et éventualités

Définition

Lors d'une expérience aléatoire, on appelle univers, noté Ω, l'ensemble des résultats possibles, que l'on appelle éventualités.
Dans tout ce chapitre, Ω est un ensemble fini.

Remarques

- Les sous-ensembles de Ω sont appelés événements.
- Les événements formés par un seul élément sont des événements élémentaires.
- Ω est l'événement certain.
- L'ensemble vide, $\emptyset$, est l'événement impossible.

Exemples

On lance un dé et on note le résultat de la face supérieure.
$\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

« Obtenir un résultat pair » est un événement, constitué de trois éventualités.

« Obtenir un entier inférieur ou égal à 2 » est un événement élémentaire car il n'est constitué que de 2.

« Obtenir un multiple de 10 » est l'événement impossible.

I.3 Intersection, réunion

Définition

Soient deux événements A et B.

- On note $A \cap B$ l'intersection de A et de B, constituée des éventualités appartenant à A et à B.
- On note $A \cup B$ la réunion de A et de B, constituée des éventualités appartenant à A ou à B.

I.4 Événement contraire

Définition

On appelle événement contraire de A, noté $\overline{\mathrm{A}}$, l'ensemble des éventualités de Ω qui ne sont pas dans A.
A et B sont incompatibles lorsque $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset$.

II Probabilités

Lors d'une expérience aléatoire, on cherche à mesurer le nombre de chance d'arrivée de chaque éventualité.

Définition

Soit $\Omega = \{a_1 \,;\, a_2 \,;\, \cdots a_n\}$ l'univers associé à une expérience aléatoire.
On définit une loi de probabilité sur Ω en choisissant des nombres $p_1,\, p_2, \ldots p_n$ tous compris entre 0 et 1, tels que $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.
p_i est la probabilité de l'événement élémentaire a_i.
La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.

Exemple : Pour un dé non truqué, on choisit $\dfrac{1}{6}$ comme probabilité de chaque face.
La probabilité d'avoir un résultat pair est $\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{2}$.

II.1 Propriétés

Propriétés

- Pour tout événement A : $0 \leqslant p(\mathrm{A}) \leqslant 1$
- $p(\Omega) = 1$; $p(\emptyset) = 0$
- Pour deux événements A et B : $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}) - p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$
- Si A et sont incompatibles : $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B})$.
- $p(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - p(\mathrm{A})$

III Variable aléatoire, loi de probabilité et espérance

III.1 Variable aléatoire

Définition

Définir une variable aléatoire X sur l'univers associé à une expérience aléatoire, c'est associer un nombre à chaque issue de cet univers.
Cette variable aléatoire est **discrète** lorsqu'elle prend un nombre fini de valeurs possibles, $x_1,\, x_2, \ldots, x_n$.
L'ensemble des issues auxquelles on associe la même valeurs x_i (i étant un entier quelconque entre 1 et n) est l'événement $X = x_i$

Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définir une loi de probabilité d'une variable aléatoire X, c'est associer une probabilité p_i à chaque événement $X = x_i$.

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = \Sigma_{i=1}^{i=n} p_i =$$

On donne la loi de probabilité de X en général sous forme de tableau.

Exemple 1 : on lance deux dés non truqués de couleurs différentes, un rouge et un vert et on considère les couples de résultats obtenus, en notant en premier le résultats du dé rouge.
On calcule alors la somme S des résultats obtenus.

Pour tourner les valeurs prises par S, non peut réaliser un tableau à double entrée.

Dé 1 / Dé 2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

L'événement « $S = 3$ » est $\{(2\ ;\ 1)\ ;\ (1\ ;\ 2)\}$.

L'événement « $S = 6$ » est $\{(1\ ;\ 5)\ ;\ (2\ ;\ 4)\ ;\ (3\ ;\ 3)\ ;\ (4\ ;\ 2)\ ;\ (5\ ;\ 1)\}$.
Chaque couple a la même probabilité de survenir : on a équiprobabilité en ce qui concerne les couples. Chaque couple a une probabilité de $\frac{1}{36}$.
On en déduit la loi de probabilité de S :

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p\,(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Exemple 2 :
On lance une pièce et un dé et on regarde les résultats dans cet ordre. Une issue possible est par exemple (Pile ; 3).

Si l'on obtient Pile ou 1 ou 2, on gagne 1 euro ; si l'on obtient Face et 5 ou 6, on pers 3 euros ; sinon, on ne gagne ni ne perd rien.

Résumons cela dans un tableau à double entrée. Dans chaque case, on met le gain algébrique correspondant à chaque couple obtenu.

Dé / Pièce	1	2	3	4	5	6
P	1	1	1	1	1	1
Face	1	1	0	0	-3	-3

Si on note X le gain algébrique de ce jeu, la loi de probabilité de X est :

x_i	-3	0	1
$p\left(X=x_i\right)$	$\dfrac{2}{12}=\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{2}{3}$

Exemple 3 :

On lance deux fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. On gagne 2 euros pour chaque résultat » Pile« , et on perd 1 euro pour chaque » face« .
L'ensemble des issues est : $\Omega = \{PP; FP; FP; FF\}$. Il y a équiprobabilité puisque la pièce est équilibrée.
Soit X l'application définie sur Ω qui à chaque issue associe le gain correspondant. Donc X prend les valeurs : 4 ; 1 ou -2. X est une variable aléatoire.
Pour chaque valeur possible (par exemple 1), on peut considérer l'événement $(X = 2) = \{PF; FP\}$ et lui associer sa probabilité. On obtient alors une loi de probabilité sur l'ensemble des gains : Les valeurs possibles sont : $\{4; 1; -2\}$.
Cette loi est appelée **loi de** X et est notée P_X.

gain x_i	$x_1=-2$	$x_2=1$	$x_3=4$
probabilité $p_i=P(X=x_i)$	0.25	0.5	0.25

III.2 Espérance d'une variable aléatoire

Définition

Soit X une variable aléatoire, prenant les n valeurs x_1, x_2, dots, x_n, deprobabilités respectives p_1, p_2, ..., p_n.
L'espérance de X, notée $E(X)$, est la moyenne des valeurs x_i, pondérées par leurs probabilités.

$$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n = \sum_{i=1}^{i=n} p_ix_i$$

Par exemple, dans l'exemple 2 dans lequel on lance une pièce et un dé :
$E(X) = (-3)\times\dfrac{1}{6} + 0\times\dfrac{1}{6} + 1\times\dfrac{2}{3} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{6}$.
Cela signifie que je jeu est favorable au joueur : il gagne en moyenne $\dfrac{1}{6}$ € par partie, s'il joue un grand nombre de parties.

IV Loi binomiale

IV.1 Répétition d'épreuves identiques indépendantes

Définition

Effectuer successivement la même expérience aléatoire, dans les mêmes conditions, c'est réaliser une succession d'expériences **identiques indépendantes**.
Une issue est alors une liste ordonnée des résultats de l'expérience répétée..
Cela revient à effectuer des tirages répétés, avec remise, dans le même ensemble.

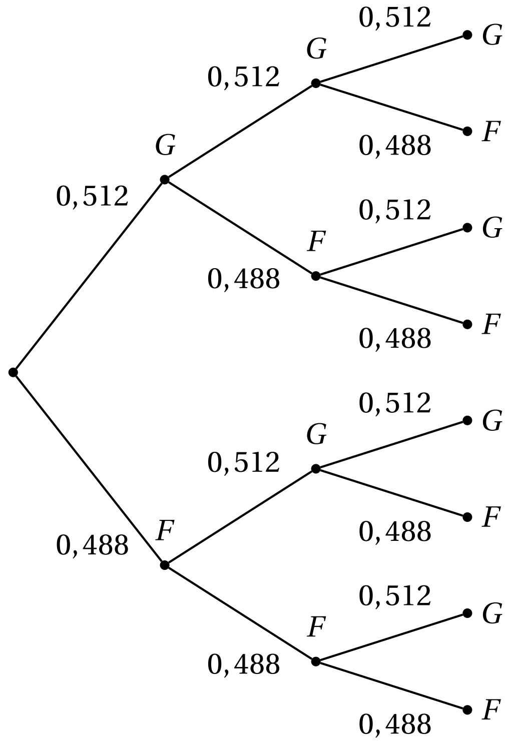
Exemples :

- On lance sept fois de suite la même pièce de monnaie. Une issue est la succession de septs résultats, chacun étant à P ou F.
- On regarde les fratries de trois enfants et l'on regarde les sexes des enfants G ou F.

Remarque : On peut représenter la répétition d'expériences identiques indépendantes laide d'arbres pondérés.

Exemple : la proportion de garçons à la naissance est de 0,512.

Pour les fratries de trois enfants, on obtient donc l'arbre suivant :



IV.2 Schéma de Bernoulli

Définition

On appelle schéma de Bernoulli la répétition de n épreuves identiques indépendantes, à deux issues, appelées généralement succès et échec (S et E), de probabilités p et $1-p$.
Les paramètres sont n (nombre d'épreuves) et p, probabilité d'un succès.

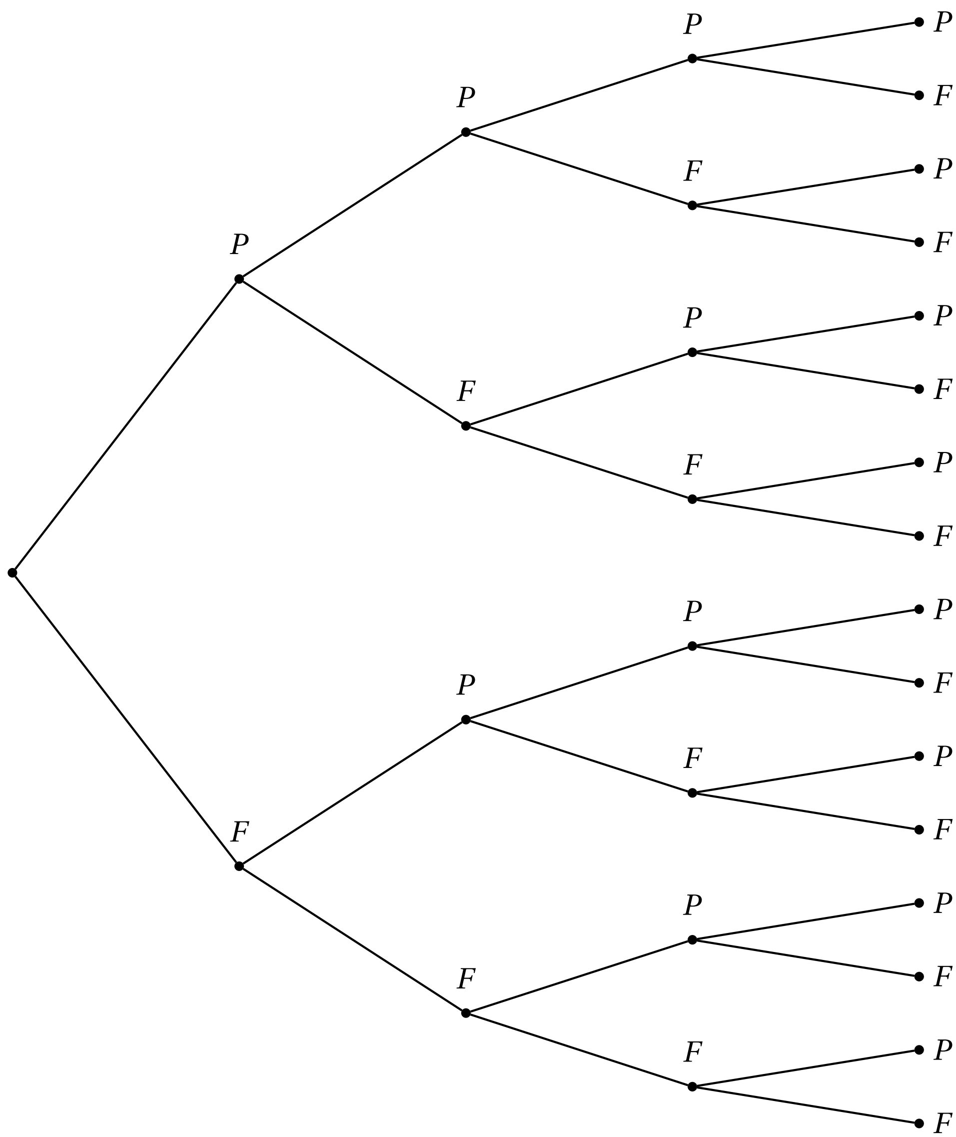
C'est le cas de l'exemple précédent.
Dans cet exemple, quel est le nombre de listes comportant deux garçons ?

Définition

Dans un schéma de Bernoulli comparant n épreuves, on appelle coefficient binomial $\binom{n}{k}$ le nombre de listes contenant k succès.

En utilisant l'exemple précédent, on a $\binom{3}{0}=1$, $\binom{3}{1}=3$, $\binom{3}{2}=3$ et $\binom{3}{3}=1$.

Autre exemple : on lance quatre fois de suite une pièce de monnaie. On obtient l'arbre suivant :



On en déduit :
$\binom{4}{0} = 1$; $\binom{4}{1} = 4$; ; $\binom{4}{2} = 6$; $\binom{4}{3} = 4$; $\binom{4}{4} = 1$.

Les calculatrices permettent de calculer les coefficients binomiaux.

- Sur : TI :
- Sur Casio

IV.3 Loi binomiale

Définition

On considère une expérience aléatoire de Bernoulli, de paramètres n et p, p étant la probabilité d'un succès.
On considère alors la variable aléatoire X comptant le nombre de succès.
On dit que X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;\,p)$ et l'on écrit $\hookrightarrow \mathscr{B}(n\,;\,p)$.

Propriété

$p(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

Explication : On applique le principe multiplicatif ; si une branche contient k succès, il y a $n-k$ échecs. Une feuille contenant k succès a donc une probabilité égale à $p^k(1-p)n-k$.
Comme il y a $\binom{n}{k}$ branches de ce type, on obtient la probabilité annoncée.

Exemple : Cinq amis postulent à un emploi de cadre dans une entreprise. Les études de leur dossier sont faites indépendamment les unes des autres. On admet que la probabilité que chacun d'eux soit recruté est égale à $0,07$.

On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi ces cinq candidats.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité que deux exactement des cinq amis soient recrutés. On arrondira à 10^{-3}.
3. Calculer la probabilité que les cinq amis soient recrutés.

Remarque : $p(X=k)$ se calcule directement à la calculatrice.

Théorème admis

L'espérance d'une loi binomiale $\mathscr{B}(n\ ;\ p)$ est $E=np$.