1^{re}ES : correction du sujet A

I

Résoudre les équations suivantes :

a) $2x^2 - x - 6 = 0$

$\Delta = 49 > 0$; il y a deux solutions :

$x_1 = \dfrac{1-7}{4} = -\dfrac{3}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1+7}{4} = 2$

$\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\dfrac{3}{2}\,;\,2\right\}}$

b) $3x^2 = 2x \Leftrightarrow 3x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(3x-2) = 0$.

un produit de facteurs est nul, si, et seulement si, l'un des facteurs est nul.

Il est clair que l'ensemble des solutions est : $\boxed{\mathscr{S} = \left\{0\,;\,\dfrac{2}{3}\right\}}$

II

Résoudre les inéquations suivantes :

a) $2x^2 - 7x - 15 \geqslant 0$

$\Delta = 169 > 0$; il y a deux racines.

$x_1 = \dfrac{7-13}{4} = -\dfrac{6}{4} = \boxed{-\dfrac{3}{2}}$ et $x_2 = \dfrac{7+13}{4} = \boxed{5}$.

$2x^2 - 7x - 15$ est positif (du signe du coefficient de x^2, 2) à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines.

On en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\dfrac{3}{2}$		5		$+\infty$
$2x^2 - 7x - 15$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions est donc

$\boxed{\mathscr{S} = \left]-\infty\,;\,-\dfrac{3}{2}\right] \cup [5\,;\,+\infty[}$

b) $\dfrac{x+3}{2x^2 - x - 1} \leqslant 0$

- On cherche les valeurs interdites : on résout $2x^2 - x - 1 = 0$.

  $\Delta = 9 > 0$: i y a deux racines :

  $x_1 = \dfrac{1-3}{4} = -\dfrac{1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1+3}{4} = 1$.

  Les **valeurs interdites** sont donc $-\dfrac{1}{2}$ et 1.

  Signe de $2x^2 - x - 1$: c'est du signe de 2, coefficient de x^2 donc positif à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines.

- signe de $x+3$: $x+3 \geqslant 0$ pour $x \geqslant -3$ et $x+3 \leqslant 0$ pour $x \leqslant -3$.
- Tableau de signes :

x	$-\infty$		-3		$-\dfrac{3}{2}$		1		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$	‖	$+$	‖	$+$	
$2x^2 - x - 1$		$+$		$+$	‖	$-$	‖	$+$	
Quotient		$-$	0	$+$	‖	$-$	‖	$+$	

L'ensemble des solutions est donc $\boxed{\mathscr{S} =]-\infty\,;\,-3] \cup]}$

III

Soient f et g les fonctions définies par $f(x) = 2x^2 - 7x - 15$ et $g(x) = -3x + 1$.

1. Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont $-\dfrac{3}{2}$ et 5. (cf. II)
2. La courbe représentative de f **coupe l'axe des abscisses** en $-\dfrac{3}{2}$ et en 5.
3. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2x^2 - 7x - 15 = -3x + 1$

   $\Leftrightarrow 2x^2 - 4x - 16 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x^2 - 2x - 8 = 0}$ (en simplifiant par 2).

   $\Delta = 36 > 0$; il y a deux solutions qui sont :

   $x_1 = \dfrac{2-6}{2} = -2$ et $x_2 = \dfrac{2+6}{2} = 4$.
4. La parabole représentative de f et la droite représentative de g se coupent aux points d'abscisses -2 et 4.

IV

Une entreprise fabrique un produit . La production mensuelle ne peut pas dépasser 15 000 articles. Le coût total, exprimé en milliers d'euros, de fabrication de x milliers d'articles est modélisé par la fonction C définie sur $[0\,;\,15]$ par :

$$C(x) = 0,5x^2 + 0,6x + 8,16.$$

1. Le coût de fabrication de 4 000 articles est $C(4) = 18,56$ milliers d'euros ; ces 4 000 articles sont vendus 32 milliers d'euros car $R(4) = 32$. Le bénéfice est donc de $R(4) - C(4) = 13,44$ milliers d'euros, donc l'entreprise gagne 13 440 d'euros.

   Le coût de fabrication de 12 000 articles est $C(12) = 87,36$ milliers d'euros ; ces 12 000 articles sont vendus 96 milliers d'euros car $R(8) =$

96. Le bénéfice est donc de $C(12) - R(12) = 8,64$ milliers d'euros, donc l'entreprise a un bénéfice de 8 640 €.

Elle gagne plus en vendant 4 000 articles qu'avec 12 000.

2. On désigne par $R(x)$ le montant en milliers d'euros de la recette mensuelle obtenue pour la vente de x milliers d'articles du produit.

   On a donc $R(x) = 8x$.

   (a) Pour $\mathscr{D}$, voir courbe ci-dessous.

   (b)
   - Pour que l'entreprise réalise un bénéfice, il faut que $1,2 \leqslant x \leqslant 13,7$, donc qu'elle vende entre 1 200 et 13 700 articles (droite $\mathscr{D}$ au-dessus de la courbe $\mathscr{C}$)
   - Le bénéfice est maximal quand l'écart entre la droite $\mathscr{D}$ et la courbe $\mathscr{C}$ est maximal vers $x = 7,5$ donc pour environ 7 500 articles vendus.

3. (a) $B(x) = R(x) - C(x) = 8x - \left(0,5x^2 + 0,6x + 8,16\right) = -0,5x^2 + 7,4x - 8,16$ donc

   $\boxed{B(x) = -0,5x^2 + 7,4x - 8,16}$

   (b) $\Delta = 7,4^2 - 4 \times (-0,5) \times (-8,16) = 38,44 > 0$

   Il y a deux racines :

   $x_1 = \dfrac{-7,4 - \sqrt{38,44}}{-1} = 7,4 + \sqrt{38,44} = \boxed{13,6}$ et $x_2 = 7,4 - \sqrt{38,44} = \boxed{1,2}$

   Le bénéfice est positif, donc du signe opposé à -0,5, entre les racines, donc pour $1,2 \leqslant x \leqslant 13,6$ et négatif pour $0 < 1,2$ ou pour $13,6 \leqslant x \leqslant 15$

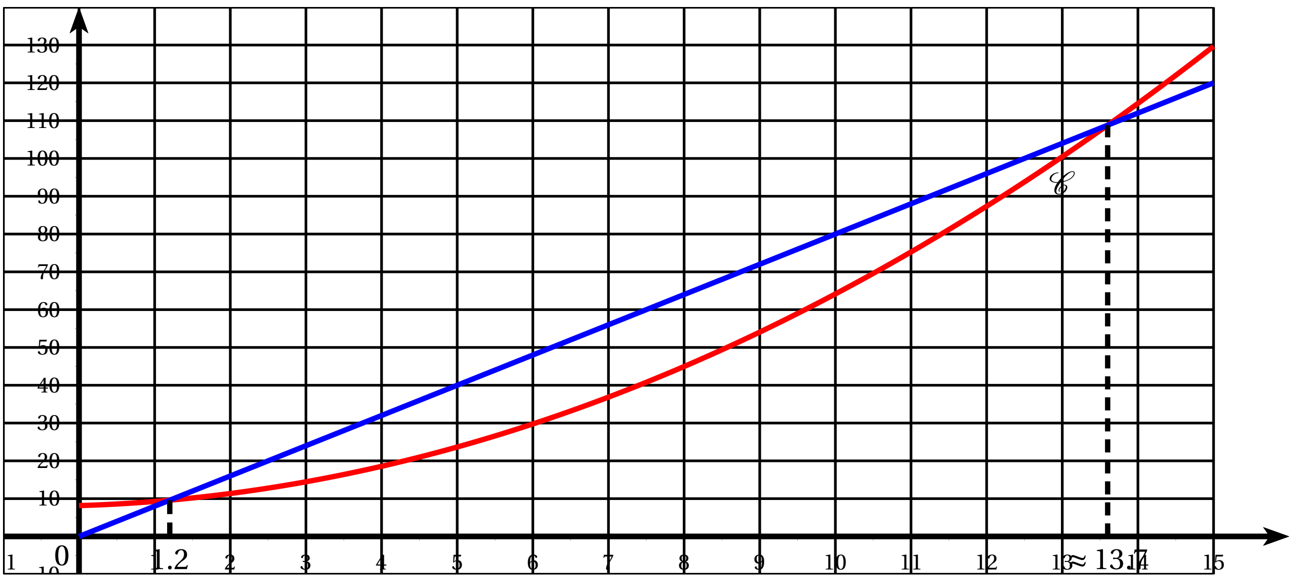
   La production permettant de réaliser un bénéfice est l'intervalle $[1,2 ; 13,6]$, donc il faut que l'entreprise fabrique et vende entre 1 200 et 13 600 objets.

   (c) B est une fonction carré ; le coefficient de x^2 est négatif, donc la fonction est d'abord croissante puis décroissante, le maximum étant atteint pour $x = -\dfrac{b}{2a} = 7,4$

x	0	$7,4$	15
$B(x)$	$-9,16$ ↗	$10,22$	↘ $-9,66$

   Pour avoir un bénéfice maximal, il faut donc vendre 7 400 articles.

   Ce bénéfice maximal est B(7,4)=19,22 milliers d'euros, soit 19 220€.



1reES : équations du second degré (sujet B)

I

Résoudre les équations suivantes :

a) $3x^2+8x-3=0$

$\Delta=100>0$: il y a deux solutions :

$x_1=\dfrac{8-10}{6}=-\dfrac{1}{3}$ et $x_2=\dfrac{8+10}{6}=3$

$\boxed{\mathscr{S}=\left\{-\dfrac{1}{3}\,;\,3\right\}}$

b) $5x^2=3x \Leftrightarrow 5x^2-3x=0 \Leftrightarrow x(5x-3)=0$

un produit de facteurs est nul, si, et seulement si, l'un des facteurs est nul.

L'ensemble des solutions est alors : $\boxed{\mathscr{S}=\left\{0\,;\,\dfrac{3}{5}\right\}}$

II

Résoudre les inéquations suivantes :

a) $3x^2-10x-8\geqslant 0$

$\Delta=196>0$: il y a deux racines :

$x_1=\dfrac{10-14}{6}=\boxed{-\dfrac{2}{3}}$ et $x_2=\dfrac{10+14}{6}=\boxed{4}$.

Le coefficient de x^2 est 3, positif.

Tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\dfrac{2}{3}$		4		$+\infty$
$3x^2-10x-8$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S}=\left]-\infty\,;\,-\dfrac{2}{3}\right]\cup[4\,;\,=\infty[}$

b) $\dfrac{x+2}{2x^2-x-1}\leqslant 0$

- Valeurs interdites : on résout $2x^2-x-1=0$

  $\delta=9>0$: il y a deux solutions :

  $x_1=\dfrac{1-3}{4}=-\dfrac{1}{2}$ et $x_2=\dfrac{1+3}{4}=1$.

  Les valeurs interdites sont $-\dfrac{1}{2}$ et 1.
- Signe de $2x^2-x-1$: le coefficient de x^2 est 2, positif, donc $2x^2-x-1$ est positif à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines, donc sur $]-\infty\,;\,-\dfrac{1}{2}]$ et sur $[1\,;\,=\infty[$ et négatif sur $\left[-\dfrac{1}{2}\,;\,1\right]$.
- Signe de $x+2$: $x+2<0 \Leftrightarrow x<-2$ et $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$
- **Tableau de signes** :

x	$-\infty$		-2		$-\dfrac{1}{2}$		1		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$2x^2-x-1$		$+$		$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	
$\dfrac{x+2}{2x^2-x-1}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	

- Conclusion : $\boxed{\mathscr{S}=]-\infty\,;\,-2]\cup\left]-\dfrac{1}{2}\,;\,1\right[}$

III

Soient f et g les fonctions définies par $f(x)=2x^2-7x-15$ et $g(x)=7x+1$.

1. $f(x)=0 \Leftrightarrow 2x^2-7x-15=0$

   $\Delta=169>0$; il y a deux racines.

   $x_1=\dfrac{7-13}{4}=-\dfrac{6}{4}=\boxed{-\dfrac{3}{2}}$ et $x_2=\dfrac{7+13}{4}=\boxed{5}$.
2. La courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en $\boxed{-\dfrac{3}{2}}$ et en $\boxed{5}$.
3. $f(x)=g(x) \Leftrightarrow 2x^2-7x-15=7x+1$

   $\Leftrightarrow 2x^2-14x-16=0 \Leftrightarrow \boxed{x^2-7x-8=0}$ en simplifiant par 2

   $\Delta=(-7)^2-4\times1\times(-8)=81>0$.

   Il y a deux solutions :

   $x_1=\dfrac{7-9}{2}=\boxed{-1}$ et $x_2=\dfrac{7+9}{2}=\boxed{8}$.
4. La parabole représentative de f et la droite représentative de g se coupent aux points d'abscisses -1 et 8.

IV

Une entreprise fabrique un produit . La production mensuelle ne peut pas dépasser 15 000 articles.

Le coût total, exprimé en milliers d'euros, de fabrication de x milliers d'articles est modélisé par la fonction C définie sur $[0\,;\,15]$ par :

$$C(x)=0,5x^2+0,6x+8,16.$$

1. Le coût de fabrication de 4 000 articles est $C(4) = 18,56$ milliers d'euros ; ces 4 000 articles sont vendus 32 milliers d'euros car $R(4) = 32$. Le bénéfice est donc de $R(4) - C(4) = 13,44$ milliers d'euros, donc l'entreprise gagne 13 440 d'euros.

   Le coût de fabrication de 12 000 articles est $C(12) = 87,36$ milliers d'euros ; ces 12 000 articles sont vendus 96 milliers d'euros car $R(8) = 96$. Le bénéfice est donc de $C(12) - R(12) = 8,64$ milliers d'euros, donc l'entreprise a un bénéfice de 8 640 €.

   Elle gagne plus en vendant 4 000 articles qu'avec 12 000.

2. On désigne par $R(x)$ le montant en milliers d'euros de la recette mensuelle obtenue pour la vente de x milliers d'articles du produit.

   On a donc $R(x) = 8x$.

   (a) Pour $\mathscr{D}$, voir courbe ci-dessous.

   (b) • Pour que l'entreprise réalise un bénéfice, il faut que $1,2 \leqslant x \leqslant 13,7$, donc qu'elle vende entre 1 200 et 13 700 articles (droite $\mathscr{D}$ au-dessus de la courbe $\mathscr{C}$)

   • Le bénéfice est maximal quand l'écart entre la droite $\mathscr{D}$ et la courbe $\mathscr{C}$ est maximal vers $x = 7,5$ donc pour environ 7 500 articles vendus.

3. (a) $B(x) = R(x) - C(x) = 8x - \left(0,5x^2 + 0,6x + 8,16\right) = -0,5x^2 + 7,4x - 8,16$ donc

   $\boxed{B(x) = -0,5x^2 + 7,4x - 8,16}$

   (b) $\Delta = 7,4^2 - 4 \times (-0,5) \times (-8,16) = 38,44 > 0$

   Il y a deux racines :

   $x_1 = \dfrac{-7,4 - \sqrt{38,44}}{-1} = 7,4 + \sqrt{38,44} = \boxed{13,6}$ et $x_2 = 7,4 - \sqrt{38,44} = \boxed{1,2}$

   Le bénéfice est positif, donc du signe opposé à -0,5, entre les racines, donc pour $1,2 \leqslant x \leqslant 13,6$ et négatif pour $0 < 1,2$ ou pour $13,6 \leqslant x \leqslant 15$

   La production permettant de réaliser un bénéfice est l'intervalle $[1,2~;~13,6]$, donc il faut que l'entreprise fabrique et vende entre 1 200 et 13 600 objets.

   (c) B est une fonction carré ; le coefficient de x^2 est négatif, donc la fonction est d'abord croissante puis décroissante, le maximum étant atteint pour $x = -\dfrac{b}{2a} = 7,4$

x	0	7,4	15
$B(x)$	$-9,16$ ↗	10,22	↘ $-9,66$

   Pour avoir un bénéfice maximal, il faut donc vendre 7 400 articles.

   Ce bénéfice maximal est B(7,4)=19,22 milliers d'euros, soit 19 220€.