1^{re} ES : correction du contrôle sur la dérivation (2)

Exercice I

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 + 6x$.

1. $f'(x) = 2x + 6 = 2(x+3)$.

   $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3$ et comme f' est une fonction affine de coefficient directeur positif,

   $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > -3$ et donc, $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < -3$

2. Sens de variation de f :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	-9	$\nearrow$	

Exercice II

Pour chacune des fonctions suivantes, calculer sa dérivée, étudier son signe et en déduire le tableau de variation.

1. $f : x \longmapsto x^3 - 27x + 10$ sur $\mathbb{R}$

   $f'(x) = 3x^2 - 27 = 3\left(x^2 - 9\right) = 3\left(x^2 - 3^2\right)$
   $= 3(x+3)(x-3)$.

   $f'(x)$ s'annule en -3 et 3 et est du signe du coefficient de x^2, 3, donc positif, à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines.

   On en déduit le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	64	$\searrow$	-44	$\nearrow$	

2. $g : x \longmapsto (2x-3)\sqrt{x}$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

   $g = uv$ avec $\begin{cases} u(x) = 2x - 3 \\ v(x) = \sqrt{x} \end{cases}$.

   $g' : (uv)' : u'v + uv'$ avec $\begin{cases} u'(x) = 2 \\ v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$.

   Alors : $f'(x) = 2\sqrt{x} + (2x-3) \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} = \dfrac{2x-3}{2\sqrt{x}} = \dfrac{4x+2x-3}{2\sqrt{x}} = \dfrac{6x-3}{2\sqrt{x}} = \dfrac{3(2x-1)}{2\sqrt{x}}$.

   $g'(x)$ est du signe de $2x-1$, positif pour $x > \dfrac{1}{2}$.

   On en déduit le tableau de variation de g :

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$	

Exercice III

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 16x.$$

1. $f'(x) = x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2$.

   $f'(x) \geqslant 0$ et $f'(x) = 0$ pour $x = 4$.

   On en déduit que f est croissante sur $\mathbb{R}$.

2. L'équation réduite de la tangente au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

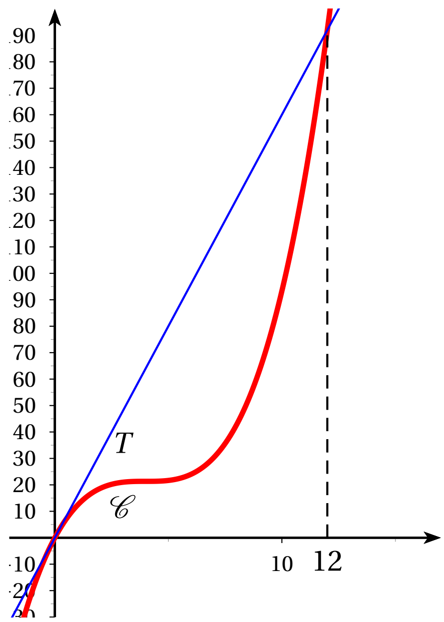
   Pour $a = 0$, on obtient :

   $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ donc T a pour équation $\boxed{y = 16x}$.

3. $f(x) - 16x = \dfrac{1}{3}x^3 - 4x^2 = \dfrac{x^3 - 12x^2}{3} = \dfrac{x^2(x-12)}{3}$ qui s'annue en 0 et en 12 et est du signe de $x-12$, donc positif pour $x \geqslant 12$.

4. On en déduit que $\mathscr{C}$ et T ont des points communs en 0 et en 12 et que $\mathscr{C}$ est au-dessus de T pour $x > 12$.

   Courbe (non demandée) :



Exercice IV

Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;\,-1]\cup]-1\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{x^2}{x+1}.$$

1. $f=\dfrac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x)=x^2\\ v(x)=x+1\end{cases}$

   $f'=\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $\begin{cases} u'(x)=2x\\ v'(x)=1\end{cases}$.

   Alors : $f'(x)=\dfrac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}=\dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$.

2. $f'(x)$ est du signe du numérateur, car $(x+1)^2>0$. $x(x+2)$ s'annule pour $x=-2$ ou $x=0$ et $x(x+2)>0$ en dehors de l'intervalle formé par les racines.

   Tableau de variation :

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	-4	↘	‖	↘	0	↗	

Exercice V

Une entreprise possède une chaîne de fabrication capable de fabriquer en une semaine entre 6 000 et 32 000 pièces identiques.
Le coût de fabrication en euros de x milliers de pièces, pour x compris entre 6 et 32, est noté $C(x)$ et est donné par :

$$C(x)=2x^3-108x^2+5\,060x-4\,640.$$

Toutes les pièces produites sont vendues au prix unitaire de 3,50 €.
On note $B(x)$ le bénéfice réalisé pour la production et la vente de x milliers de pièces.

1. $B(x)=3\,500x-C(x)$
   $=3\,500x-\left(2x^3-108x^2+5\,060x-4\,640\right)$
   $=\boxed{-2x^3+108x^2-1\,560x+4\,640}$

2. $B'(x)=-6x^2+216x-1\,560=\boxed{-6\left(x^2-36x+260\right)}$.

3. $B'(x)$ est du signe opposé à celui de $x^2+36x+260$.

   Le discriminant est $\Delta=36^2-4\times1\times260$ $=1296-1040=256>0$.

   Il y a deux racines : $\dfrac{36-\sqrt{256}}{2}=10$ et $\dfrac{36+\sqrt{256}}{2}=26$.

   $x^2-36x+260$ est donc négatif entre les racines, donc $B'(x)$ est négatif sur $[6\,;\,10]$ et sur $[26\,;\,32]$ et positif sur $[10\,;\,26]$.

4. Tableau de variation de B :

x	6		10		26		32
$B'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$B(x)$		↘	$-2\,160$	↗	$1\,936$	↘	

5. Le bénéfice maximal réalisable par l'entreprise est de 1 936 euros, obtenus par la fabrication de 26 000 objets.