1^{re}ES : correction du devoir sur feuille n° 3

I

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^2-4x+7}{x^2+3}$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

1. $f = \dfrac{u}{v}$ avec $\left\{\begin{array}{l} u(x) = x^2-4x+7 \\ v(x) = x^2+3 \end{array}\right.$.

   $f' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $\left\{\begin{array}{l} u'(x) = 2x-4 = 2(x-2) \\ v'(x) = 2x \end{array}\right.$

   Alors : $f'(x) = \dfrac{2(x-2)\left(x^2+3\right)-2x\left(x^2-4x+7\right)}{\left(x^2+3\right)^2} = 2\times\dfrac{(x-2)\left(x^2+3\right)-x\left(x^2-4x+7\right)}{\left(x^2+3\right)^2}$

   $= 2\times\dfrac{x^3+3x-2x^2-6-x^3+4x^2-7x}{\left(x^2+3\right)^2} = 2\times\dfrac{2x^2-4x-6}{\left(^2+3\right)^2} = \boxed{\dfrac{4\left(x^2-2x-3\right)}{\left(x^2+3\right)^2}}$.

2. Il est clair que $f'(x)$ est du signe de x^2-2x-3.

   Le discriminant est $\Delta = 16 > 0$; il y a deux racines : $x_1 = \dfrac{2-\sqrt{16}}{2} = -1$ et $x_2 = \dfrac{2+\sqrt{16}}{2} = 3$.

   x^2-2x-3 est du signe du coefficient de x^2, 1, donc positif à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines.

   f est donc croissante sur $]-\infty\,;\,-1]$ et sur $[3\,;\,+\infty[$, et décroissante sur $[-1\,;\,3]$.

   Tableau de variation :

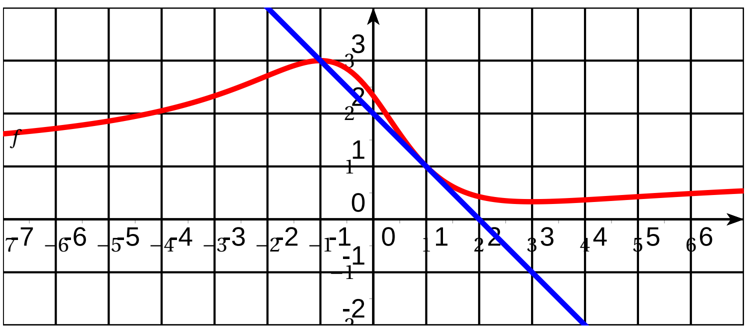
x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	3	$\searrow$	$\dfrac{1}{3}$	$\nearrow$	

3. Une équation de la tangente au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x-a)+f(a)$, donc avec $a = 1$, on a :

   $y = f'(1)(x-1)+f(1)$; or $f'(1) = -1$ et $f(1) = 1$.

   La tangente en 1 a donc pour équation $y = -(x-1)+1$ donc $\boxed{y = -x+2}$

4. Représenter la tangente T sur le graphique ci-dessous.



II

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3-3x^2+9x.$$

1. $f'(x) = x^2-6x+9 = \boxed{(x-3)^2 \geqslant 0}$.

   On en déduit que f est **croissante** sur $\mathbb{R}$.

2. On a $f'(0) = 9$ et $f(0) = 0$ donc l'équation de la tangente T en 0 est $\boxed{y = 9x}$.

3. $f(x)-9x=\dfrac{x^3}{3}-3x^2=\dfrac{x^3-9x^2}{3}=\boxed{\dfrac{x^2(x-9)}{3}}$.
   Cette expression s'annule en 0 et en 9 et est du signe de $x-9$, donc positif pour $x\geqslant 9$.
   On en déduit que $\mathscr{C}$ et T ont deux points d'intersection, en 0 et en 9 et que $\mathscr{C}$ est au-dessus de T pour $\boxed{x\geqslant 9}$.

III

Dans un restaurant, le coût total en euros pour la fabrication de x repas est donné par la relation $C(x)=2x^2-230x+7\,200$ pour x compris entre 30 et 120.
Lorsque x repas sont fabriqués, on appelle coût moyen d'un repas le quotient $\dfrac{C(x)}{x}$ qu'on note $C_M(x)$.

1. Le coût moyen est $\boxed{C_M(x)=\dfrac{C(x)}{x}=2x-230+\dfrac{7\,200}{x}}$.
2. $C'_M(x)=2-\dfrac{7\,200}{x^2}=\dfrac{2x^2-7200}{x^2}=\dfrac{2\left(x^2-3600\right)}{x^2}=\dfrac{2\left(x^2-60^2\right)}{x^2}=\boxed{\dfrac{2(x-60)(x+60)}{x^2}}$.
3. Sur l'intervalle $[30\,;\,120]$, $x+60$ et x^2 sont positifs, donc $C'_M(x)$ est du signe de $x-60$, donc négatif pour $x\leqslant 60$ et positif pour $x\geqslant 60$.
4. **Tableau de variation de C_M** :

x	30		60		120
$C'_M(x)$		$-$	0	$+$	
$C_M(x)$	70	$\searrow$	10	$\nearrow$	70

5. On en déduit qu'il faut fabriquer $\boxed{60}$ repas pour que le coût moyen soit minimal.

IV

Un camion doit parcourir un trajet de 200 km, on suppose que sa vitesse (en km/h) est constante et on la note x.
La consommation de carburant du camion est de
$6+\dfrac{x^2}{800}$ litres de gasoil par heure avec un prix du gasoil au litre de 1 € et le chauffeur est payé 10 € de l'heure.

1. Le temps de trajet est $\boxed{t=\dfrac{200}{x}}$ heures.
2. Le coût en carburant est $\left(6+\dfrac{x^2}{800}\right)\times\dfrac{200}{x}=\boxed{\dfrac{1200}{x}+\dfrac{x}{4}}$.
   Le coût du chauffeur est $\dfrac{200}{x}\times 10=\boxed{\dfrac{2000}{x}}$ €.
3. Le coût total du trajet est $C(x)=\dfrac{1200}{x}+\dfrac{x}{4}+\dfrac{2000}{x}=\boxed{\dfrac{x}{4}+\dfrac{3\,200}{x}}$.
4. $C'(x)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{3200}{x^2}=\boxed{\dfrac{x^2-12800}{x^2}}$.
   $C'(x)=0$ pour $x=\sqrt{12800}=-\sqrt{6400\times 2}=-80\sqrt{2}$ ou $x=80\sqrt{2}$.
   $C'(x)\geqslant 0$ pour x à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines (sachant que $x>0$) Remarque : on peut se limiter à $x\leqslant 130$ puisque la vitesse maximum en France est 130 km/h (et de toute façon, d'après la théorie de la relativité d'Einstein, aucun objet ne peut avoir une vitesse supérieure à celle de la lumière et encore, à condition d'avoir une masse nulle !)

x	0		$80\sqrt{2}$		130
$C'(x)$		$-$	0	$+$	
$C(x)$		↘	$40\sqrt{2}$	↗	

5. Le coût du trajet est minimal si la vitesse est égale à $\boxed{80\sqrt{2}}$, soit environ 113 km/h ;

V

Soit la fonction f définie $[-4;4]$ par $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

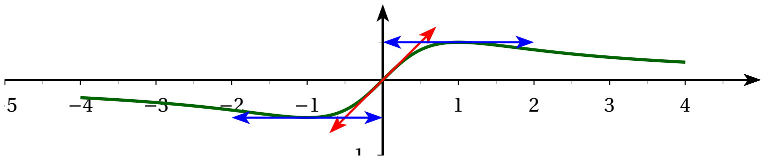
1. $f'(x) = \dfrac{1\left(x^2+1\right) - 2x \times x}{\left(x^2+1\right)^2} = \dfrac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2} = \boxed{\dfrac{(1-x)(1+x)}{\left(x^2+1\right)^2}}$.

2. $f'(x)$ est du signe du numérateur car le dénominateur est positif.
   Le numérateur s'annule en -1 et en 1 et est positif (du signe du coefficient de x^2) à l'extérieur de l'intervalle formée par les racines.
   On en déduit le tableau de variation :

x	-4		-1		1		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\dfrac{4}{17}$	↘	$-\dfrac{1}{2}$	↗	$\dfrac{1}{2}$	↘	$\dfrac{4}{17}$

3. (T) a pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0)$, donc $\boxed{y = x}$.

4.



VI

1. soit f définie par $f(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$.
   $f'(x) = \boxed{6x^2 - 120x + 450}$
   Le discriminant est $\Delta = (-120)^2 - 4 \times 6 \times 450 = 3600 = 60^2 > 0$.
   Il y a deux racines : $\dfrac{120-60}{12} = 5$ et $\dfrac{120+60}{12} = \dfrac{180}{12} = 15$.
   (remarque : on aurait pu factoriser par 6 : $f'(x) = 6\left(x^2 - 20x + 75\right)$)
   $f'(x)$ est un trinôme du second degré, positif (du signe du coefficient de x^2) à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines.
   On en déduit le tableau de variation :

x	$-\infty$		5		15		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	$1\,000$	↘	0	↗	

2. (a) $x > 0$ car x est une longueur et strictement positive, car pour $x = 0$, la boîte n'aurait pas de largeur.
   $2x \leqslant 30$ donc $x \leqslant 15$.
   On en déduit que $\boxed{x \in]0\,;\,15]}$.
   (b) Le volume de la boîte est (aire de base) $\times$ hauteur donc $V(x) = x(15-x) \times (30-2x) = \boxed{2x(15-x)^2}$.
   (c) On obtient, en développant :
   $V(x) = 2x\left(15^2 - 30x + x^2\right) = 2x\left(225 - 30x + x^2\right) = \boxed{2x^3 - 60x^2 + 450x = f(x)}$ où f est la fonction étudiée à la question 1.
   On en déduit que le volume est maximal pour $x = 5$ cm ; il vaut alors $1\,000$ cm^3, donc 1 L.