# $1^{\text{re}}$ ES : devoir à la maison n° 2

## I

On considère les fonctions suivantes :

$$f(x) = x^2 + 2x - 3 \text{ et } g(x) = \frac{2x-7}{3x+5}$$

1. • L'ensemble de définition de $f$ est $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.
   • L'ensemble de définition de $g$ est $\mathscr{D}_g = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{5}{3}\right\}$.
2. (a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$ donc $f(3) = 3^2 + 2 \times 3 - 3 = 12$ ; $f(-4) = (-4)^2 + 2 \times (-4) - 3 = 5$ donc $\boxed{f(3) = 12}$ ; $\boxed{f(-4) = 5}$.

   (b) $x$ est un antécédent de -4 par $f$ si, et seulement si, $f(x) = -4$.
   $f(x) = -4 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = -4$
   $\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.
   $\boxed{\textbf{L'antécédent de -4 par } f \textbf{ est -1}}$
   Pour les antécédents de -3 par $f$, on résout l'équation $f(x) = -3$.
   $f(x) = -3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = -3$
   $\Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x+2) = 0$ d'où $x = 0$ ou $x = -2$.
   $\boxed{\textbf{Les antécédents de -3 par } f \textbf{ sont -2 et 0}}$.
3. (a) $g(x) = \frac{2x-7}{3x+5}$ donc $\boxed{g(2) = -\frac{3}{11}}$ et $\boxed{g(-4) = \frac{15}{7}}$

   (b) $g(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{2x-7}{3x+5} = 1 \Leftrightarrow 2x - 7 = 3x + 5$
   $\Leftrightarrow -x = 12 \Leftrightarrow x = -12$.
   $\boxed{\textbf{L'antécédent de 1 par } g \textbf{ est -12}}$.
   $g(x) = -2 \Leftrightarrow \frac{2x-7}{3x+5} = -2$
   $\Leftrightarrow 2x - 7 = -2(3x+5) \Leftrightarrow 2x - 7 = -6x - 10$
   $\Leftrightarrow 8x = -3 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{8}$.
   $\boxed{\textbf{L'antécédent de 2 par } g \textbf{ est } -\frac{3}{8}}$.

## II

Soit $f$ la fonction carré.

1. Sur $[0 ; +\infty[$, $f$ est croissante donc, comme $0 \leqslant 3 \leqslant x \leqslant 5$, $3^2 \leqslant f(x) \leqslant 5^2$ donc $\boxed{9 \leqslant f(x) \leqslant 25}$.
2. De même, $-3 \leqslant x \leqslant -2 \leqslant 0$ et $f$ est décroissante sur $]-\infty ; 0]$ donc $f(-2) \leqslant f(x) \leqslant f(-3)$, d'où $\boxed{4 \leqslant f(x) \leqslant 9}$

## III

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^3 + 1$.

1. Soient $a$ et $b$ deux réels quelconques avec $a < b$.
   On sait que la fonction cube $x \mapsto x^3$ est croissante sur $\mathbb{R}$ donc :
   $a < b \Rightarrow a^3 < b^3 \Rightarrow 3a^3 < 3b^3$
   $\Rightarrow 3a^3 + 1 < 3b^3 + 1 \Rightarrow \boxed{f(a) < f(b)}$.
   Les images sont classées dans le même ordre que les antécédents, donc $f$ est **croissante**.
   **Remarque :** on peut aussi comparer $f(a)$ et $f(b)$ en étudiant le signe de leur différence :
   $f(b) - f(a) = \left(3b^3 + 1\right) - \left(3a^3 + 1\right) = 3\left(b^3 - a^3\right)$
   $> 0$ car, comme la fonction cube est croissante, $b^3 - a^3 > 0$.
2. $f$ est croissante ; $f(0) = 1$ et $f(1) = 5$ donc la solution $\alpha$ de l'équation $f(x) = 2$ appartient à $[0 ; 1]$.
   À la calculatrice, on trouve $\boxed{\alpha \approx 0.7}$ (plus précisément : $\alpha \approx 0{,}693\,361\,274\,351$)

## IV

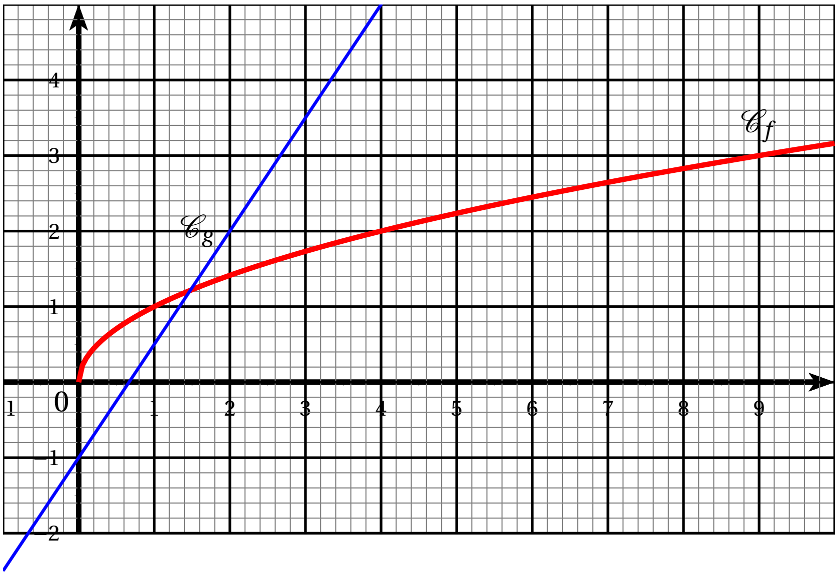
$g$ est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = 4 - \frac{1}{x}$.

Soient $x_1$ et $x_2$ deux réels quelconques de $]0 ; +\infty[$ avec $0 < x_1 < x_2$. Alors $g(x_2) - f(x_1)$
$= \left[4 - \frac{1}{x_2}\right] - \left[4 - \frac{1}{x_1}\right] = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2}$.
$x_1 < x_2$ donc $x_2 - x_1 > 0$ et $x_1 x_2 > 0$ donc
$g(x_2) - g(x_1) > 0$ d'où $g(x_1) << g(x_2)$.
$g$ conserve l'ordre donc $g$ est **croissante** sur $]0 ; +\infty[$.

**V**

Soient les fonctions $f(x)=\sqrt{x}$ et $g(x)=\dfrac{3}{2}x-1$ définies sur $[0\ ;\ +\infty[$.

1. **Voir graphique ci-dessous**




2. **Graphiquement**, on trouve que $\mathscr{C}_g$ est en dessous de $\mathscr{C}_f$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1,5$ et au-dessus pour $x \geqslant 1,5$ (valeurs approchées).
   **Remarque** : graphiquement, on ne peut pas trouver des valeurs précises au centième près !
3. **Vérification algébrique** : on souhaite connaître la position relative des deux courbes.
   Un point d'abscisse $x$ de $\mathscr{C}_g$ est au-dessus du point de même abscisse $x$ de $\mathscr{C}_f$ si, et seulement, si $g(x) \geqslant f(x)$, c'est-à-dire $g(x)-f(x) \geqslant 0$, donc $\dfrac{3}{2}x-1-\sqrt{x} \geqslant 0$ d'où $\dfrac{3}{2}x-\sqrt{x}-1 \geqslant 0$.
   Cela revient donc ) étudier le signe de $D(x)=\dfrac{3}{2}x-\sqrt{x}-1$.
4. On veut résoudre l'inéquation $D(x) \geqslant 0$.
   On pose $X=\sqrt{x}$ (donc $X \geqslant 0$).
   $\dfrac{3}{2}x-\sqrt{x}-1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \boxed{\dfrac{3}{2}X^2-X-1 \geqslant 0}$
5. L'inéquation équivaut à $\boxed{3X^2-2X-2 \geqslant 0}$ (en multipliant par 2 puis en simplifiant).
   $\Delta = 28 > 0$ ; l'équation a deux solutions.
   $X_1=\dfrac{2-\sqrt{28}}{6}=\dfrac{2-2\sqrt{7}}{6}=\dfrac{1-\sqrt{7}}{3}<0$ et $X_2=\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}$.
   Or, $X$ dit être positif. On en déduit que l'on doit avoir $X \geqslant X_2$, c'est-à-dire $\boxed{X=\sqrt{x} \geqslant \dfrac{1+\sqrt{7}}{3}}$.
   ⚠ : l'inconnue est $X$, donc les solutions se notent en utilisant la lettre $X$ et non $x$ !
   Comme la fonction carré est croissante sur $[0\ ;\ +\infty]$, $\sqrt{x} \geqslant \dfrac{1\sqrt{7}}{3} \Leftrightarrow x=\left(\sqrt{x}\right)^2 \geqslant \left(\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}\right)^2=\dfrac{1+2\sqrt{7}+7}{9}$
   $=\boxed{\dfrac{8+2\sqrt{7}}{9}}$.
   $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ pour $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{8+2\sqrt{7}}{9}$ et en dessous pour $x \geqslant \dfrac{8+2\sqrt{7}}{9}$.
   Comme $\dfrac{8+2\sqrt{7}}{9} \approx 1,477$, cela correspond à ce que nous avons trouvé graphiquement.