1^{re} ES : contrôle sur la dérivation (2)

Exercice I — 2 points

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 + 6x$.

1. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
2. En déduire le tableau de variations de f.

Exercice II — 4 points

Pour chacune des fonctions suivantes, calculer sa dérivée, étudier son signe et en déduire le tableau de variation.

1. $f : x \longmapsto x^3 - 27x + 10$ sur $\mathbb{R}$
2. $g : x \longmapsto (2x-3)\sqrt{x}$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

Exercice III — 5 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 16x.$$

1. Déterminer le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de f au point d'abscisse 0 dans un repère $(O\,;\,I\,;\,J)$.
3. Étudier le signe de l'expression $f(x) - 16x$.
4. En déduire la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de T.

Exercice IV — 4 points

Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;\,-1[\cup]-1\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}.$$

1. Calculer la dérivée de f.
2. Déterminer le sens de variation de f.

Exercice V — 5 points

Une entreprise possède une chaîne de fabrication capable de fabriquer en une semaine entre 6 000 et 32 000 pièces identiques.
Le coût de fabrication en euros de x milliers de pièces, pour x compris entre 6 et 32, est noté $C(x)$ et est donné par :

$$C(x) = 2x^3 - 108x^2 + 5\,060x - 4\,640.$$

Toutes les pièces produites sont vendues au prix unitaire de 3,50 €.
On note $B(x)$ le bénéfice réalisé pour la production et la vente de x milliers de pièces.

1. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $[6\,;\,32]$:

$$B(x) = -2x^3 + 108x^2 - 1\,560x + 4\,640.$$

2. Déterminer $B'(x)$.
3. Étudier le signe de $B'(x)$ sur l'intervalle $[6\,;\,32]$.
4. En déduire le tableau de variation de la fonction B.
5. Quel est le bénéfice maximal réalisable par l'entreprise ? Donner le nombre de pièces à produire qui réalise ce maximum.