1^{re} ES : devoir sur feuille n° 4

I

On considère les fonctions $f : x \longmapsto (x+1)\sqrt{x}$ et $g : x \longmapsto x^3 + \dfrac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

1. Montrer que le point $C(1\ ;\ 2)$ appartient aux deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives de f et de g.
2. Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont-elles la même tangente au point $C(1\ ;\ 2)$?

II

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 12x + 12.$$

On note f' la déérivée de f et f'' (se lit « f seconde ») la dérivée de f'.

1. (a) Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$.
   (b) Étudier le signe de $f''(x)$.
   (c) En déduire le sens de variation de f'.
   (d) Calculer $f'(1)$;
   (e) À l'aide du tableau de variation de f', en déduire le signe de $f'(x)$.
2. Dresser alors le tableau de variation de f.

III

Le coût total de production d'un bien est donné par :

$$C(q) = q^3 - 12q^2 + 72q \text{ pour tout } q \text{ de } [0\ ;\ 8].$$

Pour toute quantité q produite, on assimile le coût marginal à la dérivée du coût total $C_m(q) = C'(q)$.

1. **Étude du coût marginal**
   (a) Exprimer le coût marginal en fonction de q et montrer que $C'(q) = 3(q-4)^2 + 24$
   (b) En déduire les variations du coût marginal puis le signe de $C'(q)$ pour tout q de $[0\,;8]$.
   (c) Montrer que la fonction de coût total est strictement croissante sur $[0\,;8]$.
2. **Étude du coût moyen**
   On note $CM(q)$ le coût moyen d'une quantité q produite
   (a) Exprimer le coût moyen en fonction de q
   (b) Étudier les variations du coût moyen sur $]0\,;8]$.
3. **Lien entre coût marginal et coût moyen**
   (a) Dresser les tableaux de variations de CM et de C' sur $]0\,;8]$
   (b) Résoudre l'équation
   $$3q^2-24q+72 = q^2-12q+72.$$
   (c) Dans le même repère orthogonal bien choisi, tracer la courbe $\mathscr{C}'$ représentant le coût marginal et la courbe $\mathscr{C}$ représentant le coût moyen.
   (On fera apparaître les solutions de l'équation précédente ainsi que les tangentes horizontales à $\mathscr{C}'$ ou à $\mathscr{C}$.
   (d) D'après le graphique, pour quelles quantités le coût marginal est-il supérieur au coût moyen ?

IV

On souhaite construire un bâtiment dont la surfece au sol a la forme d'un rectangle d'aire 100 cm^2., entouré d'une bande de terrain ayant une largeur de 5 m sur les plus petits côtés et de 10 m sur les plus grands côtés.
On se propose de déterminer la largeur x t la longueur y du bâtiment de telle sorte que l'aire totale du terrain soit minimale.

1. Expliquer pourquoi $y = \dfrac{100}{x}$ et $x \in]0\ ;\ 10]$.
2. Montrer que l'aire totale du terrain est donnée par la fonction f telle que
   $$f(x) = (x+10)\left(\frac{100}{x} + 20\right).$$
3. Étudier les variations de f sur l'intervalle $]0\ ;\ 10]$.
4. Déduire de la question précédente les dimensions du bâtiment permettant d'obtenir un terrain d'aire minimale.

V

Une machine produit des pièces dont le diamètre doit être de 5 cm. On observe malgré tout de petites différences sur les diamètres.
Pour savoir sir la machine est in réglée et fonctionne correctement, on prélève un échantillon de 40 pièces et on obtient les résultats suivants :

4,9	5	5,2	4,7	4,8	5,1	4,5	5,2	4,9	4,8
4,9	4,9	4,9	5,3	5	4,8	4,8	4,9	5,1	5,3
4,5	4,9	4,9	5	4,8	4,8	5,3	4,8	5,4	5
5,4	4,8	4,7	5	5	4,8	4,6	4,7	4,9	4,7

La machine est correctement réglée si :

- environ 95 % des données de l'échantillon appartiennent à l'intervalle $\left[\overline{x}-2\sigma\,;\,\overline{x}+2\sigma\right]$, où $\overline{x}=5$ est la moyenne théorique et σ l'écart-type de l'échantillon.
- environ 68 % des données de l'échantillon appartiennent à l'intervalle $\left[\overline{x}-\sigma\,;\,\overline{x}+\sigma\right]$.

La machine est-elle correctement réglée ?

VI

Définition (élasticité)

On note p le prix d'un produit en euros et $f(p)$ la demande liée à ce produit pour le prix p. L'élasticité $E(p)$ de la demande par rapport au prix p est le pourcentage de variation de la demande pour une augmentation de 1 % du prix p.

La demande $f(p)$ d'un produit proposé à un prix $p \in [11\,;\,+\infty[$ (en euros) est donnée par

$$f(p)=\frac{100\,000p}{p^2-100}.$$

Étude de la demande

1. Calculer la demande pour $p=11$, $p=15$ et $p=90$ en arrondissant si nécessaire à l'unité près.
2. Verifier que $f(p)>0$ pour tout $p>11$.
   Montrer que f est décroissante sur $[11\,;\,+\infty[$.
3. On suppose que le prix p , initialement à 15€, subit une augmentation de 1 %.
   (a) Calculer le nouveau prix p_1 , ainsi que la demande correspondante à ce prix, arrondie à l'unité près.
   (b) En déduire $E(15)$, l'élasticité de la demande par rapport au prix de 15 €.

Etude de l'élasticité de la demande

Supposons qu'une augmentation Δp du prix induise une augmentation Δf de la demande. $\dfrac{\Delta f}{f}$ est le taux d'augmentation de la demande et $\dfrac{\Delta p}{p}$ le taux d'augmentation du prix.
On peut écrire : $E(p)=\dfrac{\Delta f/f}{\Delta p/p}=\dfrac{\Delta f}{\Delta p}\times\dfrac{p}{f(p)}\approx p\times\dfrac{f'(p)}{f(p)}$ (en supposant que les variations sont petites).

Cette dernière expression est celle utilisée par les économistes.

Dans toute la suite, c'est cette formule qui sera utilisée, donc $\boxed{E(p)=p\times\dfrac{f'(p)}{f(p)}}$

1. Établir l'égalité $E(p)=1-\dfrac{2p^2}{p^2-100}$.
2. Calculer $E(15)$ à l'aide de cette dernière expression et comparer avec le résultat obtenu à la première partie.
3. Quel est le signe de $E(p)$ pour $p>11$? Justifier la réponse et interpréter ce résultat.
4. Calculer $E'(p)$ et en déduire le tableau de variation de E .
5. Calculer la valeur de p_0 pour laquelle l'élasticité est de -1.25.
6. Comment évolue la demande quand le prix passe de 30 € à 30.30 € ?

VII « Optional »

Finding a minimum

Among all possible rectangles with area equal to 10 square feet, what are the dimensions of the one with the minimal perimeter.