

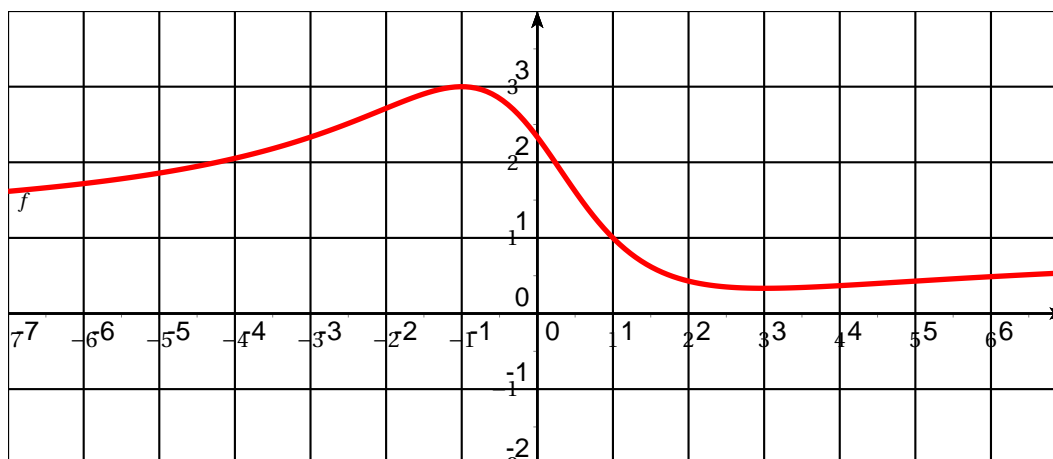
1^{re}ES : devoir sur feuille n° 3

I

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 7}{x^2 + 3}$.

On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

1. Calculer $f'(x)$ où f désigne la dérivée de la fonction f .
2. Étudier les variations de la fonction f .
3. Donner une équation de la tangente T à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 1.
4. Représenter la tangente T sur le graphique ci-dessous.



II

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x.$$

1. Déterminer le sens de variation de f .
2. Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 0.
3. En étudiant le signe de la différence de $f(x)$ et de l'expression de la tangente T , étudier la position relative de \mathcal{C}_f et de T .

III

Dans un restaurant, le coût total en euros pour la fabrication de x repas est donné par la relation $C(x) = 2x^2 - 230x + 7200$ pour x compris entre 30 et 120.

Lorsque x repas sont fabriqués, on appelle coût moyen d'un repas le quotient $\frac{C(x)}{x}$ qu'on note $C_M(x)$.

1. Donner l'expression de $C_M(x)$ en fonction de x .
2. Calculer la dérivée de C_M .
3. Montrer que cette dérivée a le même signe que $x - 60$ sur l'intervalle $[30; 120]$.

4. Étudier le sens de variation de C_M sur $[30; 120]$.
5. Combien de repas faut-il fabriquer pour que le coût moyen soit minimal ?

IV

Un camion doit parcourir un trajet de 200 km, on suppose que sa vitesse (en km/h) est constante et on la note x .

La consommation de carburant du camion est de

$6 + \frac{x^2}{800}$ litres de gasoil par heure avec un prix du gasoil au litre de 1 € et le chauffeur est payé 10 € de l'heure.

1. Exprimer le temps de trajet t en fonction de x .
2. En déduire le coût en carburant sur l'ensemble du trajet en fonction de x puis le coût du chauffeur sur l'ensemble du trajet en fonction de x .
3. Montrer que le coût total du trajet en fonction de x est $C(x) = \frac{x}{4} + \frac{3200}{x}$.
4. Étudier les variations de la fonction C sur $[0; +\infty[$.
5. En déduire quelle doit être la vitesse du camion pour que le coût total du trajet soit minimal.

V

Soit la fonction f définie $[-4;4]$ par $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Etudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f .
3. Donner l'équation de la droite (T) , tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 0.
4. Tracer dans le repère ci-dessous la courbe \mathcal{C}_f ainsi que ses tangentes.

VI

1. Étudier les variations de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$.
2. On veut construire le patron d'une boîte de lait dans une feuille cartonnée de 30 cm de côté. Le patron est donné par la figure 1 ci-dessous et la figure 2 est celle de la boîte qui est un parallélépipède rectangle

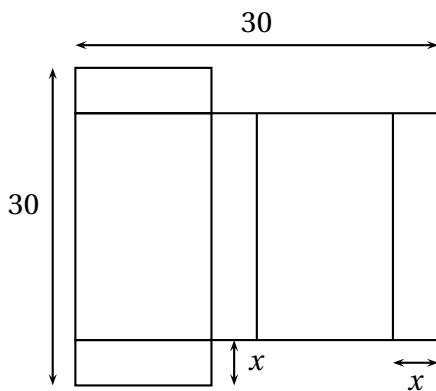


Figure 1

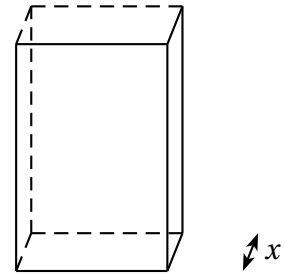


Figure 2

L'objectif est de trouver la valeur de x qui rend le volume de la boîte maximal.

- (a) Expliquer pourquoi les valeurs de x appartiennent à $]0; 15[$.
- (b) Exprimer en fonction de x le volume de cette boîte.
- (c) Pour quelle valeurs de x le volume de cette boîte est-il maximal ?