Suites numériques

Table des matières

I Généralités sur les suites 1
- I.1 Définitions et notations 1
- I.2 Définition explicite 2
- I.3 Définition par récurrence : 2

II Représentation graphique des termes d'une suite 3

III Variations d'une suite 3

IV Suites arithmétiques 4
- IV.1 Définition 4
- IV.2 Expression explicite 4
- IV.3 Variations d'une suite arithmétique 4
- IV.4 Somme des termes d'une suite arithmétique 5

V Suites géométriques 5
- V.1 Définition : 5
- V.2 Formulation explicite (admise) 6
- V.3 Variations 6
- V.4 Somme des termes d'une suite géométrique 6

I Généralités sur les suites

I.1 Définitions et notations

Définition « naïve »

Une suite numérique est une suite de nombres, illimitée et dont on numérote les termes.

Exemples :

- $0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 \cdots ;$ (suite des entiers naturels)
- $0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12 ; 14 \cdots$ (suite des entiers pairs)
- $1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 ; 64 ; 128 ; 256 \cdots$ (suite des puissances de 2)
- $1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; 21 ; 34 ; 55 ; 89 ; 144$ (suite de Fibonacci)

Définition mathématique

Une suite numérique u est une fonction numérique, définie sur $\mathbb{N}$ ou sur une partie de $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rl} u: & \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R} \\ & n \mapsto u(n) \end{array}$$

Notation :

- Le terme général $u(n)$ se note u_n.
  L'ensemble des termes de la suite se note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Attention à ne pas confondre les deux notations :

Exemples :

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 2^n - 1$ pour tout n
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \sqrt{n-4}$ pour tout $n \geqslant 4$.

Nous allons voir qu'il y a deux façons de définir une suite.

I.2 Définition explicite

Une suite est définie de façon explicite lorsque le terme général u_n est directement exprimé en fonction de n.

Exemple :

Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = \dfrac{1}{n^2+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. $u_0 = 1$; $u_1 = \dfrac{1}{2}$, $u_{10} = \dfrac{1}{101}$; $u_{50} = \dfrac{1}{2\,501}$.
On peut calculer **facilement et rapidement** n'importe quel terme u_n ; il suffit de remplacer n par sa valeur.

I.3 Définition par récurrence :

Une suite (u_n) est définie par récurrence lorsque chaque terme est défini en fonction du ou des termes précédents, et par la donnée du ou des premiers termes.

Exemples :

1. $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. **Suite de Fibonacci :**
   $\left\{\begin{array}{l} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_n + u_{n+1} \text{ pour tout } n \end{array}\right.$.
3. $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{3+u_n} \end{array}\right.$

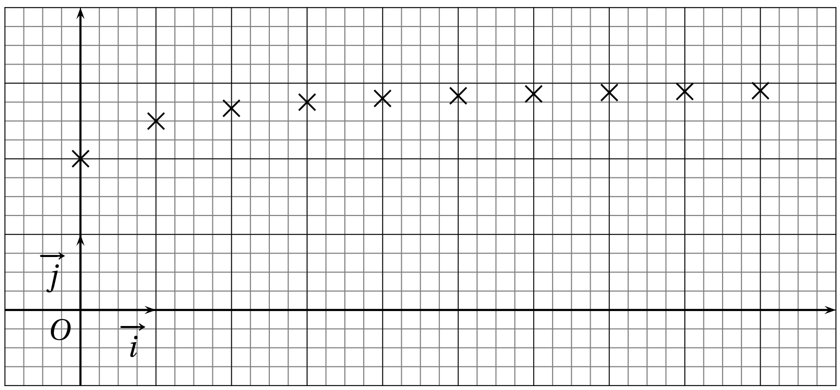
1. Calculer les trois premiers termes de ces trois suites.
2. Est-il facile de calculer le terme u_{25} ? u_{100} ?

Le problème des suites définies par récurrence est que, pour pouvoir calculer un terme, il est nécessaire d'avoir calculé auparavant tous les termes précédents.
On essaye alors pour certains types de suites définies par récurrence de trouver une définition explicite, mais ce n'est pas toujours facile ou possible.

II Représentation graphique des termes d'une suite

Suite définie de façon explicite :
On a $u_n = f(n)$ où f est une fonction.
On représente les points de coordonnées $(n\ ;\ f(n))$.

Exemple : soit $u_n = 3 - \dfrac{1}{n+1}$.
La représentation des dix premiers termes de la suite (donc de u_0 à u_9) donne :



III Variations d'une suite

Définition

a) **Suite croissante :** Une suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est croissante si, et seulement si, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} \geqslant u_n$.

b) **Suite décroissante :** Une suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est décroissante si, et seulement si, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} \leqslant u_n$.

c) **Suite constante :** Une suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est constante si, et seulement si, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} = u_n$.

d) **Suite monotone** Une suite est monotone si elle est soit croissante, soit décroissante.

Remarque : En pratique, on calcule $u_{n+1} - u_n$ pour tout n et on étudie le signe de cette différence.

Exemples :

Exemple 1 Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = n^2 + 1$. Montrons que cette suite est croissante.
Pour tout n : $u_{n+1} = (n+1)^2 + 1$; $u_n = n^2 + 1$.
Alors $u_{n+1} - u_n = [(n+1)^2 + 1] - [n^2 + 1] = (n+1)^2 - n^2 = \boxed{2n+1}$.
Comme n est un entier naturel, $2n+1$ est positif, donc $u_{n+1} - u_n$ est positif.
Par conséquent : $u_{n+1} > u_n$ pour tout n : $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est croissante}}$.

Exemple 2 Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = \dfrac{1}{n+1}$. Montrons que cette suite est décroissante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{n+2}$; $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1(n+1) - 1(n+1)}{(n+2)(n+1)} = -\dfrac{1}{(n+1)(n+2)} < 0$ car le dénominateur est positif (n étant un entier naturel) et -1 étant négatif.

Par conséquent : $u_{n+1} - u_n < 0$; on en déduit que $u_{n+1} < u_n$ pour tout n.

$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est décroissante.}}$

IV Suites arithmétiques

IV.1 Définition

Définition

Soit (u_n) une suite. S'il existe un réel r tel que, pour tout n, $u_{n+1=u_n} + r$, la suite (u_n) est appelée suite arithmétique, de raison r.

On l'appelle suite arithmétique, car chaque terme est la moyenne arithmétique (moyenne usuelle) du terme précédent et du terme suivant.

IV.2 Expression explicite

Propriété

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

Pour tout n, on a : $u_n = u_0 + nr$.

Plus généralement : pour tout p : $u_n = u_p + (n-p)r$.

Justification :

$u_1 = u_0 + r$, $u_2 = u_1 + 1 = (u_0 + r) + r = u_0 + 2r$, $u_3 = u_2 + r = (u_0 + 2r) + r = u_0 + 3r$, etc.

On a $u_n = u_0 + nr$ et $u_p = u_0 + pr$ donc par soustraction, $u_n - u_p = (n-p)r$ d'où $u_n = u_p + (n-p)r$.

IV.3 Variations d'une suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Alors :

- Si $r < 0$ la suite est décroissante.
- Si $r = 0$, la suite est constante.
- Si $r > 0$, la suite est croissante

Démonstration « évidente » puisque $u_{n+1} - u_n = r$.

IV.4 Somme des termes d'une suite arithmétique

Propriété

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

On définit : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{i=0}^{i=n} u_i$.

Alors $\boxed{S_n = (n+1)\frac{u_0+u_n}{2}}$.

Remarque : $(n+1)$ est le nombre de termes, u_0 est le premier terme et u_n est le dernier terme.

Démonstration

- Soient n et p deux entiers avec $p \leqslant n$; alors $u_p + u_{n-p} = u_0 + u_n$
  En effet : $u_p = u_0 + pr$ et $u_{n-p} = u_0 + (n-p)r$ donc $u_p + u_{n-p} = u_0 + u_0 + nr = u_0 + u_n$.
- On écrit S_n de deux façpns, une fois à l'endroit et une fois à l'envers et on somme terme à terme :
  $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n$
  $S_n = u_n u_0 + u_{n-1} + \cdots + u_1 + u_0$
  Alors : $2S_n = (u_0 + u_n) + (u_1 + u_{n-1}) + \cdots + (u_n + u_0) = (n+1)(u_0 + u_n)$ car chaque somme est égale à $u_0 + u_n$

Cas particulier

Notons $\Sigma_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \sum_{i=0}^{n} i$

Alors : $\Sigma_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Il suffit d'appliquer le résultat précédent ou la méthode précédente.

On a alors un autre moyen de calculer la somme des termes d'une suite arithmétique :
on trouve : $\boxed{S_n = (n+1)u_0 + \frac{n(n+1)}{2}r}$.

V Suites géométriques

V.1 Définition :

Définition

Une suite (u_n) est géométrique s'iil existe un nombre réel q tel que, pour tout n, $u_{n+1} = qu_n$. q est appelé la raison de la suite.

Exemple : Soit $u_n = 2^n$; $u_{n+1} = 2^{n+1} = 2u_n$ pour tout n donc la suite (u_n) est géométrique de raison 2.

V.2 Formulation explicite (admise)

Propriété

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.
Pour tout n, on a : $\boxed{u_n = u_0 \times q^n}$.

Plus généralement : pour tout $p \leqslant n$, $\boxed{u_n = u_p q^{n-p}}$.

Justification

$u_1 = qu_0$
$u_2 = qu_1 = q\left(u_0 \times q\right) = u_0 \times q^2$
$u_3 = qu_2 = q \times u_0 \times q^2 = u_0 \times q^3$
On peut imaginer que cela se poursuit ainsi.

V.3 Variations

Propriété

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.

- Si $q > 1$, la suite (u_n) est croissante si $u_0 > 0$ et décroissante si $u_0 < 0$.
- Si $0 < q < 1$, la suite (u_n) est décroissante si $u_0 > 0$ et croissante si $u_0 < 0$.
- Si $q < 0$, la suuite (u_n) n'est pas monotone.

Démonstration :

Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = u_0 q^{n+1} - u_0 q^n = u_0 q^n \left(q - 1\right)$.
Si $q > 1$, $u_0 q^n \left(q - 1\right)$ est du signe de u_0.
Si $0 < q < 1$, $q - 1 < 0$ donc $u_0 q^n \left(q - 1\right)$ est du signe opposé à u_0.
Si $q = 1$, la suite est constante, de même que si $q = 0$.

V.4 Somme des termes d'une suite géométrique

Propriété

Soit $q \neq 1$. $\boxed{s_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}$.

Démonstration :

On a :
$s_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1} + q^n$
$qs_n = q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n + q^{n+1}$
Alors : $s_n - qs_n = 1 - q^{n+1}$ donc $(1 - q)s_n = 1 - q^{n+1}$.

D'où : $s_n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ que l'on peut aussi écrire $\dfrac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$.

Théorème

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.

Soit $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$.

- Si $q = 1$: $S_n = (n+1)u_0$
- Si $q \neq 1$, $S_n = u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Démonstration :

- Si $q = 1$, tous les termes sont égaux à u_0 donc $S_n = (n+1)u_0$, $\mathbb{N}+1$ étant le nombre de termes.
- $q \neq 1$; $S_n = u_0 + u_0 q + u_0 q^2 + \cdots + u_0 q^n = u_0 \left(1 + q1 + q^2 + \cdots + q^n\right) = u_0 s_n = u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.