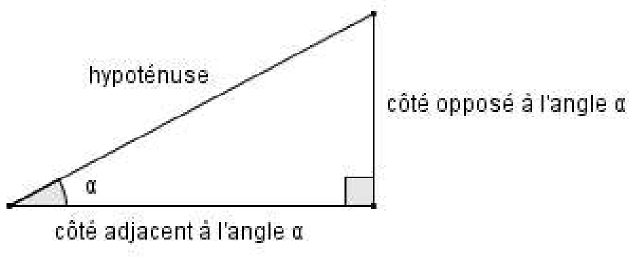
Chapitre 4 : Trigonométrie

I] Cosinus, sinus, tangente d'un angle aigu

voir activité de départ (petite feuille)

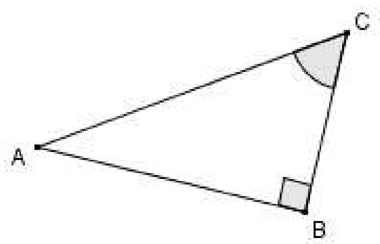
Les rapports $\frac{AB}{AC}$, $\frac{BC}{AC}$ et $\frac{BC}{BA}$ ne dépendent pas des positions des points B et C sur les côtés de l'angle $\widehat{xAy}$. Ces rapports dépendent de la mesure de l'angle $\widehat{xAy}$.



Définition : Pour tout angle aigu dans un triangle rectangle, on peut définir trois grandeurs trigonométriques :

- Le cosinus de l'angle est égal au rapport $\frac{\text{Longueur du côté adjacent à cet angle}}{\text{Longueur de l'hypoténuse}}$
- Le sinus de l'angle est égal au rapport $\frac{\text{Longueur du côté opposé à cet angle}}{\text{Longueur de l'hypoténuse}}$
- La tangente de l'angle est égal au rapport $\frac{\text{Longueur du côté opposé à cet angle}}{\text{Longueur du côté adjacent à cet angle}}$

Exemple :



$$\cos(\widehat{ACB})=\frac{CB}{CA}$$
$$\sin(\widehat{ACB})=\frac{AB}{CA}$$
$$\tan(\widehat{ACB})=\frac{AB}{CB}$$

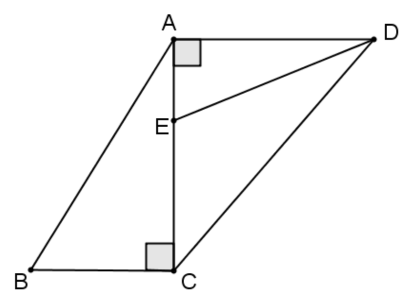
Remarque : (truc pour retenir les formules)
En utilisant les abréviations C : Cosinus S : Sinus T : Tangente
A : Côté adjacent O : Côté opposé H : Hypoténuse

S O H C A H T O A

Ces neuf lettres résument les formules.

Exercice 1

Dans tout l'exercice, on considère la figure ci-contre, qui n'est pas représentée en vraie grandeur.
Les points A, E et C sont alignés.
AD = 5 cm
AC = 9 cm
ED = 6 cm
$\widehat{BAC}=35°$



1) Calculer la mesure de l'angle $\widehat{ACD}$ au degré près.
2) Calculer la valeur exacte de AB, puis donner son arrondi au millimètre près.
3) Calculer la mesure de l'angle $\widehat{AED}$ au degré près.

4) Calculer la valeur exacte de BC, puis donner son arrondi au millimètre près.

Solutions :

1) Dans le triangle ACD rectangle en A, on a :

$$\tan \widehat{ACD} = \frac{AD}{AC}$$

$$\tan \widehat{ACD} = \frac{5}{9}$$

$$\widehat{ACD} \approx 29°$$

2) Dans le triangle ABC rectangle en C, on a :

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{AC}{AB}$$

$$\cos 35° = \frac{9}{AB}$$

$$AB \times \cos 35° = 9$$

$$AB = \frac{9}{\cos 35°} \quad (valeur\ exacte)$$

$$AB \approx 11{,}0\,cm \quad (valeur\ approchée)$$

3) Dans le triangle AED rectangle en A, on a :

$$\sin \widehat{AED} = \frac{AD}{ED}$$

$$\sin \widehat{AED} = \frac{5}{6}$$

$$\widehat{AED} \approx 34°$$

4) Dans le triangle ABC rectangle en C, on a :

$$\tan \widehat{BAC} = \frac{BC}{AC}$$

$$\tan 35° = \frac{BC}{9}$$

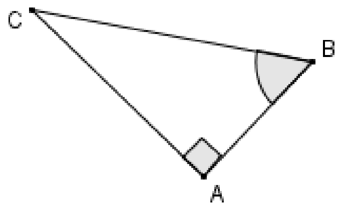
$$BC = 9 \times \tan 35° \quad (valeur\ exacte)$$

$$BC \approx 6{,}3\,cm \quad (valeur\ approchée)$$

II] Relations trigonométriques

Activité : *(activité 9 page 203)*

On considère le triangle ABC rectangle en A ci-dessous :



1) Donner les expressions de $\cos(\widehat{ABC})$, $\sin(\widehat{ABC})$ et $\tan(\widehat{ABC})$ dans ce triangle.

2) Ecrire l'égalité du théorème de Pythagore dans ce triangle rectangle.

3) Démontrer que : $(\cos(\widehat{ABC}))^2 + (\sin(\widehat{ABC}))^2 = 1$

4) Démontrer que : $\tan(\widehat{ABC}) = \dfrac{\sin(\widehat{ABC})}{\cos(\widehat{ABC})}$

Propriété : Pour tout angle aigu de mesure *x* degrés :

1) $(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = 1$

$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

2) $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Remarques :
La formule (1) permet de calculer $\cos(x)$ en connaissant $\sin(x)$ (ou l'inverse).
La formule (2) permet de calculer $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\tan(x)$ connaissant 2 de ces nombres.

Exercice 2

Sachant que $\cos(60°)=\frac{1}{2}$, calculer la valeur exacte de $\sin(60°)$, puis son arrondi au centième.

Solution :

$$(\cos(60°))^2+(\sin(60°))^2=1$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+(\sin(60°))^2=1$$
$$\frac{1}{4}+(\sin(60°))^2=1$$
$$(\sin(60°))^2=1-\frac{1}{4}$$
$$(\sin(60°))^2=\frac{3}{4}$$
$$\sin(60°)=\sqrt{\frac{3}{4}}$$
$$\sin(60°)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\sin(60°)\approx 0{,}87$$

Exercice 3

$\widehat{ABC}$ est un angle aigu tel que : $\sin(\widehat{ABC})=0{,}28$
1) Calculer la valeur exacte de $\cos(\widehat{ABC})$.
2) En déduire la valeur de $\tan(\widehat{ABC})$ sous forme de fraction irréductible.

Solution :

1)
$$(\cos(\widehat{ABC}))^2+(\sin(\widehat{ABC}))^2=1$$
$$(\cos(\widehat{ABC}))^2+(0{,}28)^2=1$$
$$(\cos(\widehat{ABC}))^2+0{,}0784=1$$
$$(\cos(\widehat{ABC}))^2=1-0{,}0784$$
$$(\cos(\widehat{ABC}))^2=0{,}9216$$
$$\cos(\widehat{ABC})=\sqrt{0{,}9216}$$
$$\cos(\widehat{ABC})=0{,}96$$

2)
$$\tan(\widehat{ABC})=\frac{\sin(\widehat{ABC})}{\cos(\widehat{ABC})}$$
$$\tan(\widehat{ABC})=\frac{0{,}28}{0{,}96}$$
$$\tan(\widehat{ABC})=\frac{0{,}28\times 100}{0{,}96\times 100}$$
$$\tan(\widehat{ABC})=\frac{28}{96}$$
$$\tan(\widehat{ABC})=\frac{4\times 7}{4\times 24}$$
$$\tan(\widehat{ABC})=\frac{7}{24}$$