Exercice 2 :

1)

<u>Méthode 1 :</u>

La médiatrice de [AB] est la droite passant par I, milieu de [AB] e vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.

I($\frac{x_A+x_B}{2}$; $\frac{y_A+y_B}{2}$) soit I(-1 ;1) et $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$ soit $\overrightarrow{AB}(-4; -6)$

Soit M$(x; y)$ un point su plan, on a $\overrightarrow{IM}(x+1; y-1)$

Pour tout point M du plan, on a donc :

$$\begin{aligned} M \in d \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -4(x+1) - 6(y-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -4x - 6y + 2 = 0 \end{aligned}$$

D admet donc pour équation $-4x - 6y + 2 = 0$ ou encore $2x + 3y - 1 = 0$

<u>Méthode 2</u>

Pour tout point M du plan
$$\begin{aligned} M \in d \quad &\Leftrightarrow \quad MA = MB \\ &\Leftrightarrow \quad MA^2 = MB^2 \end{aligned}$$

On exprime MA, MB à l'aide de x et y, on développe et on simplifie.

2) Soit d' la perpendiculaire à d passant par C. Déterminons l'équation de d'

<u>Equation de d', méthode 1</u> :

(AB) et d' étant toutes deux perpendiculaires à d, elles sont parallèles. On peut chercher une équation affine de d' : $y = ax + b$

(AB) et d' on même coefficient directeur donc : $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3}{2}$

Donc d' : $y = \frac{3}{2}x + b$

Sachant que C est un point de d', $5 = \frac{3}{2} *$ 2+b, soit $b = 2$

$$d' : y = \frac{3}{2}x + 2$$

<u>Equation de d', méthode 2</u> :

d admet pour équation affine $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

Le vecteur $\vec{u}(1; -\frac{2}{3})$ est un vecteur directeur de d et donc un vecteur normal à d'. On procède alors comme dans la question 1

<u>Coordonnées de K</u>

K étant sur d et d', ses coordonnées sont solutions du système d'équation définissant les deux droites :

$$\begin{cases} 2x + 3y - 1 = 0 \ (1) \\ 3x - 2y + 4 = 0 \ (2) \end{cases}$$

3*(1)-2*(2) donne $13y - 11 = 0$ soit $y = 11/13$

2*(1)+3*(2) donne $13x + 10 = 0$ soit $x = -10/13$

On a donc K$(-\frac{10}{13}; \frac{11}{13})$

4) On procède comme pour la question 1. d'', médiatrice de [AC] admet pour équation

$$x + y - 6 = 0$$

5) Le centre du cercle circonscrit est à égale distance de A, B et C. Il est donc intersection de médiatrices d et d''. Ses coordonnées sont donc solutions du système

$$\begin{cases} 2x + 3y - 1 = 0 \\ \ x + y - 6 = 0 \end{cases}$$

On obtient Ω $(17; -11)$

Le rayon du cercle circonscrit est : ΩA=$\sqrt{481}$

Exercice 3 :

Partie 1

1)

a) $MA^2 - MB^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2$

Sachant que $\overrightarrow{IA} = -\frac{\overrightarrow{AB}}{2}$ et $\overrightarrow{IB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2}$, on a

$$MA^2 - MB^2 = (\overrightarrow{MI} - \frac{\overrightarrow{AB}}{2})^2 - (\overrightarrow{MI} + \frac{\overrightarrow{AB}}{2})^2$$

Après développement et simplification, on obtient :

$$MA^2 - MB^2 = -2\,\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}$$

b) Sachant que H EST SUR (AB) $\overrightarrow{IH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires. Leur produit scalaire étant négatif, ils sont de sens opposés. H est donc situé sur la demi-droite [IA)

Et

$$\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{AB} = -IH.AB$$

Or, pour tout point H de [IA) $\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{AB} = -3 \Leftrightarrow -IH.AB = -3 \Leftrightarrow IH = \frac{3}{AB} \Leftrightarrow IH = 1$

Il existe donc un unique point H solution :

$$\begin{cases} H \in [IA) \\ IH = 1 \end{cases}$$

c) Soit M un point du plan et M' sont projeté orthogonal sur (AB). Par définition de M'est un point e la droite (AB).

Or $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IM'}.\overrightarrow{AB}$

Par conséquent :

$$MA^2 - MB^2 = -6 \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = -3 \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'}.\overrightarrow{AB} = -3$$

Or, d'après le b)

$$\overrightarrow{IM'}.\overrightarrow{AB} = -3 \Leftrightarrow M' = H$$

On a don finalement,

$$MA^2 - MB^2 = -6 \Leftrightarrow M' = H$$

L'ensemble des points cherchés est la perpendiculaire à (AB) passant par H

2)

a) Par la relation de Chasles $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$: $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}$

Après développement e simplification, on obtient le théorème de la médiane :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 2IA^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$

3) En remplaçant AB=3, on obtient :

$$MA^2 + MB^2 = 5 \Leftrightarrow MI^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow IM = \frac{1}{2}$$

L'ensemble des points cherchés est le cercle de centre I de rayon ½

3) De même

$MA^2 + MB^2 = 3 \Leftrightarrow MI^2 = \frac{-3}{4}$ impossible $S = \emptyset$

Partie2

1) Par la relation de Chasles $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB}$

On obtient alors facilement l'équivalence : $\overrightarrow{AG} = \frac{\overrightarrow{AB}}{3} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$

2) Par définition G est barycentre du système (A ;2)(B ;1). Par conséquent :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\overrightarrow{AB}}{3} ; \overrightarrow{BG} = -\frac{2\overrightarrow{AB}}{3}$$

Par conséquent :

$$2\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 = 2\left(\overrightarrow{MG} - \frac{\overrightarrow{AB}}{3}\right)^2 + (\overrightarrow{MG} + 2\frac{\overrightarrow{AB}}{3})^2$$

Après développement et simplification, on obtient l'identité énoncée

$$2\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = 3MG^2 + \frac{2}{3}AB^2$$

3) Sachant que AB=3

$$2\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = 10 \Leftrightarrow MG = 2\sqrt{3}/3$$

L'ensemble des points cherchés est le cercle de centre G de rayon $2\sqrt{3}/3$

b) De même

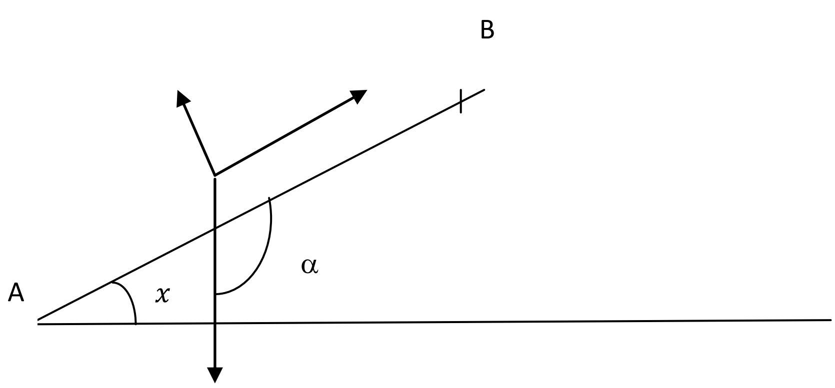
$$2\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = 6 \Leftrightarrow MG = 0 \Leftrightarrow M = G$$

G est l'unique solution du problème

c) $2\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = 4 \Leftrightarrow 3MG^2 = -2$ impossible

S=∅

<u>Exercice 4</u>



1)

$\vec{R}$ étant un vecteur normal au déplacement : $\vec{R}.\overrightarrow{AB} = 0$

$\vec{F}$ étant colinéaire de même sens que le déplacement : $\vec{F}.\overrightarrow{AB} = \|\vec{F}\|.\|\overrightarrow{AB}\|$=2150

Enfin : $P.AB = \|\vec{P}\|.\|\overrightarrow{AB}\|\cos(\alpha) = 4300\cos(\alpha) = 4300\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -4300\sin(x)$ J

2) Le travail total en Joules $W = 2150 - 4300sin(x)$

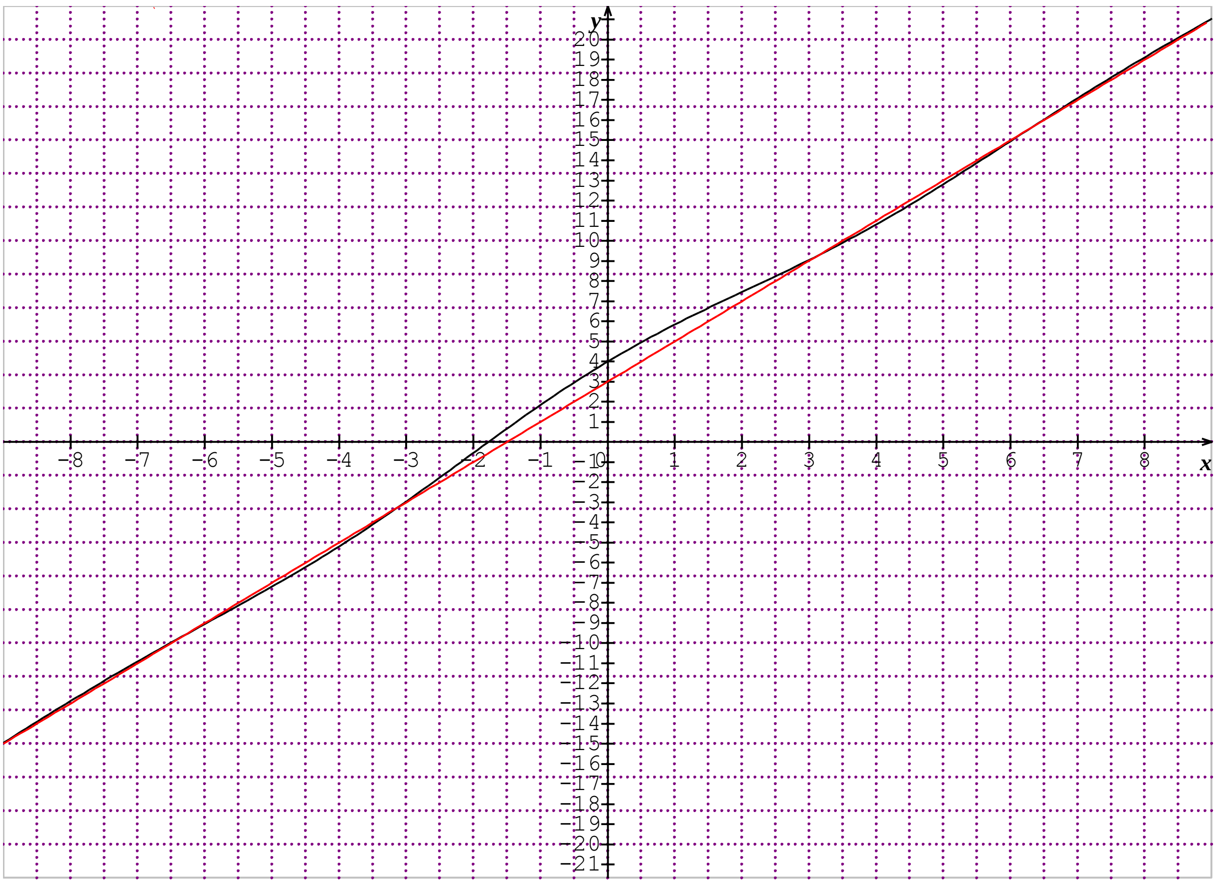
3)$W > 0 \Leftrightarrow \sin(x) < 1/2$

Sachant que $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$; $\sin(x) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x < \frac{\pi}{6}$

L'angle maxima est don π/6rad ou encore 30°

Exercice 5

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} + 2x + 3$$



En noir courbe représentative de f

En rouge : droite d'équation $y = 2x + 3$

1) f définie pour tout $\neq 0$

2)

a. D'après le graphique, il semblerait que f se rapproche de 4 quand x tend vers 0. Il ne semble donc pas y avoir d'asymptote verticale d'équation $x = 0$.

b. $\frac{\sin(x)}{\mathrm{x}} = \frac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0}$

Or la fonction sinus est dérivable en 0 et le nombre dérivé est $\cos(0) = 1$.

Par définition du nombre dérivé, le rapport ci-dessus converge vers 1 quand x tend vers 0.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{\mathrm{x}} = 1$$

Et par opérations sur les limites

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \mathrm{f(x)} = 4}$$

La droite d'équation x=0 n'est pas asymptote verticale.

3)

a) On observe graphiquement que quand x tend vers $\mp\infty$ la courbe représentative de f se rapproche de la droite d'équation $y = 2x + 3$. Cette droite serait donc asymptote oblique.

b)$\forall x \epsilon R, f(x) - (2x + 3) = \frac{\sin(x)}{x}$

Or,

$$\forall x > 0, -\frac{1}{x} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{x}$$

Or , $\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

Par le théorème des gendarmes, on en déduit

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0}$$

La droite d'équation $y = 2x + 3$. Est donc asymptote oblique en $+\infty$

Par un raisonnement analogue, on obtient le même résultat en $-\infty$