4 Fonction affine et droite

4.1. Définition

Une fonction affine est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a\,x + b$, où a et b sont des réels.
a est le coefficient d'accroissement de la fonction affine.

Exemple : Le stock d'une entreprise est de 2 400 t, le 13 Janvier, et de 2 000 t, le 29 Janvier.
La quantité stockée est modélisée par une fonction affine, $f(x)$ est la quantité en tonne et x la date, avec $x = 1$ le 1 Janvier. Ainsi $f(13) = 2\,400$ et $f(29) = 2\,000$.

$$a = \frac{2\,000 - 2\,400}{29 - 13} = \frac{-400}{16} = -25 \;;\; \text{donc } f(x) = -25\,(x - 13) + 2\,400 = -25x + 2\,725 .$$

Dire que $a = -25$ signifie que le stock diminue en moyenne de 25 t par jour.

61 Le coût marginal d'un produit en fonction de la quantité se modélise par une fonction affine f, avec le coût marginal $f(q)$, en k€, et la quantité q, en tonne.

1° Sachant que le coût marginal est de 4 500 € lorsque la production est $q = 1{,}5$ t, et de 15 k€ lorsque $q = 4$ t, déterminer la fonction de coût marginal.

2° Calculer le coût marginal lorsque la production est de 5,8 t.

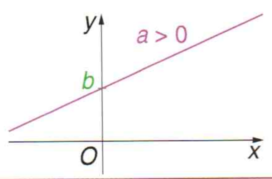
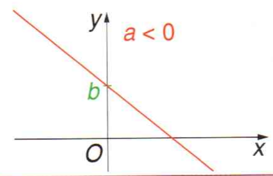
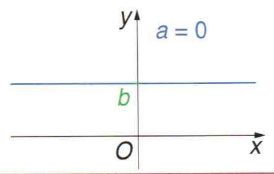
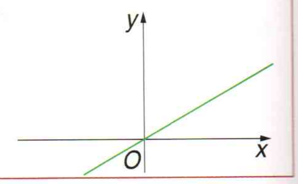
62 La population d'un village diminue de 150 habitants par an, depuis $x = 0$ en 1970.
Elle est de 2 500 habitants en 2000.

a) Déterminer la fonction de population P, où $P(x)$ est en milliers d'habitants. Calculer la population en 2005.

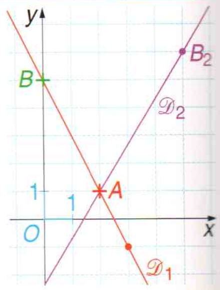
b) En 2005 est construit une gare TGV à 20 km de ce village.
La population augmente alors de 200 habitants par an.
Quelle sera la population en 2020 ?

4.2. Représentation d'une fonction affine, sens de variation

La courbe représentative d'une fonction affine est une droite d'équation $y = a\,x + b$.
Son **coefficient directeur** est a et la droite coupe l'axe des **ordonnées** en $(0 \,;\, b)$.

Si le coefficient a est **positif**, la fonction affine est croissante sur $\mathbb{R}$. La droite monte	Si le coefficient a est **négatif**, la fonction affine est décroissante sur $\mathbb{R}$. La droite descend	Si $a = 0$, la fonction affine est une fonction constante sur $\mathbb{R}$. La droite est horizontale	Si $f(x) = a\,x$, alors $b = 0$, la fonction est **linéaire**. La droite **passe par l'origine**
			

Pour lire l'équation réduite d'une droite $\mathcal{D}$ tracée :



- on repère deux points A et B de la droite et on lit la différence des ordonnées $\Delta y = y_B - y_A$, et la différence des abscisses $\Delta x = x_B - x_A$.
Le coefficient directeur est le quotient $a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$;
- on lit l'ordonnée à l'origine b, ce qui donne directement $y = a\,x + b$,
ou, si b n'est pas lisible, on applique $y = a\,(x - x_A) + y_A$.

Exemple : Pour $\mathcal{D}_1$, on lit $y = -2x + 5$; pour $\mathcal{D}_2$, on lit $y = \dfrac{5}{3}(x - 2) + 1$.

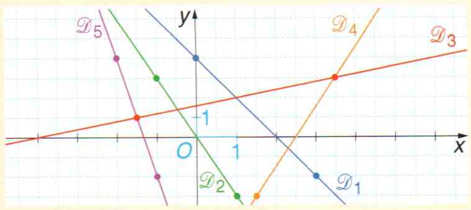
63 Représenter les fonctions affines dans le même repère orthonormal et indiquer leur sens de variation.

a) $x \longmapsto -\dfrac{3}{4}x + 5$; b) $x \longmapsto \dfrac{3x}{2}$; c) $x \longmapsto \dfrac{4x - 5}{3}$;

d) $x \longmapsto x$; e) $x \longmapsto -x$; f) $x \longmapsto -4$;

g) $x \longmapsto -2x + 15$; h) $x \longmapsto 5x + 12$; i) $x \longmapsto \dfrac{3}{4}x - 7$.

64 Déterminer l'équation réduite de chacune des droites.



1 Équations de base

1.1. Équation $ax + b = 0$, avec $a \neq 0$

On **soustrait** b à chaque membre : $ax + b - b = 0 - b \iff ax = -b$.

Comme $a \neq 0$, on **divise par a** chaque membre : $\frac{\cancel{a}x}{\cancel{a}} = \frac{-b}{a} \iff x = \frac{-b}{a}$; on obtient une solution.

Exemple : $\frac{2}{3}x - \frac{4}{5} = 0 \iff \frac{2}{3}x = \frac{4}{5} \iff x = \frac{4}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{2 \times 3}{5} = \frac{6}{5}$.

⚠ L'équation $ax = 0$ possède une unique solution $x = 0$, car $\frac{0}{a} = 0$.

Si $a = 0$, $0x = b$, avec $b \neq 0$, n'a aucune solution et l'équation $0x = 0$ a tous les réels pour solutions.

1 Résoudre de tête ; puis donner la solution en fraction simplifiée.

a) $-x - 4 = 0$; b) $6x + 3 = 0$; c) $-3x = 0$;

d) $\frac{-x+3}{5} = 0$; e) $-\frac{x}{4} + \frac{3}{4} = 0$; f) $\frac{x}{5} - \frac{1}{15} = 0$.

2 Résoudre de tête ; puis donner la solution simplifiée.

a) $-\frac{5}{2}x = 0$; b) $\frac{3x-1}{2} = 0$; c) $4 - x = 0$;

d) $-\frac{3}{2}x + \frac{9}{2} = 0$; e) $-5 - 2x = 0$; f) $\frac{3}{4}x = 0$.

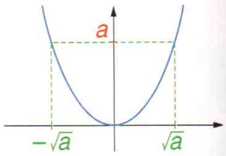
1.2. Produit nul

Mettre x en facteur, lorsque les deux termes de la somme comportent x : $ax^2 + bx = x(ax + b)$.

Factoriser une différence de deux carrés : $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$,
ainsi $-(x-4)^2 + 5 = 5 - (x-4)^2 = (\sqrt{5} + x - 4)(\sqrt{5} - x + 4)$.

Un produit de facteurs **est nul** si, et seulement si, l'un **au moins** des facteurs est nul :

$$(A) \times (B) = 0 \iff A = 0 \text{ ou } B = 0.$$



Exemples : • $x^2 - 5x = 0 \iff x(x-5) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 5$;
• $x^2 - 9 = 0 \iff (x+3)(x-3) = 0 \iff x = -3$ ou $x = 3$.

Remarque : l'équation $x^2 = a$, avec $a > 0$, a deux solutions : $x = -\sqrt{a}$ ou $x = \sqrt{a}$.

3 Résoudre :

1° a) $-4x^2 + x = 0$; b) $x^2 - 1 = 0$;

c) $\frac{5}{2}x = x^2$; d) $-4x^2 + 1 = 0$.

2° a) $\frac{x^2}{4} - \frac{1}{9} = 0$; b) $\frac{4}{3}x\ (x^2 - 9x) = 0$.

4 Résoudre par produit nul : $(A) \times (B) = 0$.

1° a) $5x^2 = 4x$; b) $3x^2 - 4x + 3 = 4(3 - x)$;

c) $(3x+2)^2 - x^2 = 0$; d) $2x^2 + 9 = 3x^2$.

2° a) $\frac{2}{3}x^2 = \frac{4}{3}x$ b) $-\frac{9}{25}x^2 + \left(x - \frac{3}{5}\right)^2 = 0$.

1.3. Quotient nul

Un quotient **est nul** si, et seulement si, le **numérateur est nul** et le **dénominateur différent de zéro** :

$$\frac{N}{D} = 0 \iff N = 0 \text{ et } D \neq 0.$$

Exemple : $\frac{4x - x^2}{x - 3} = 0$; on résout $4x - x^2 = 0 \iff x(4 - x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 4$;
et la valeur interdite est 3, car $x - 3 = 0 \iff x = 3$. Ainsi 0 et 4 sont solutions, car non interdites.

5 Résoudre les équations suivantes :

1° a) $\frac{4x-3}{x-1} = 0$; b) $\frac{x^2 - 2x}{2 + x} = 0$;

2° a) $\frac{(x-3)^2 - 25}{x - 8} = 0$; b) $\frac{-x^2 + (2x-1)^2}{2x - 1} = 0$.

6 Résoudre les équations suivantes :

1° a) $\frac{3}{x+1} = 4$; b) $\frac{x+2}{2x-3} = 1$; c) $\frac{x^2 - 9}{3x} = 0$.

2° a) $\frac{2}{x-1} = \frac{3}{2}$; b) $\frac{2-x}{x+4} = 2$; c) $\frac{x+2}{-2x} = \frac{5}{4}$.

2 Second degré

2.1. Équation $ax^2 + bx + c = 0$, avec $a \neq 0$

L'existence des solutions de cette équation dépend du signe du **discriminant** $\Delta = b^2 - 4ac$:

- si $\Delta < 0$ **(négatif)**, il n'y a pas de solution ;
- si $\Delta = 0$ **(nul)**, il y a une unique solution $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$, abscisse du sommet de la parabole ;
- si $\Delta > 0$ **(positif)**, il y a deux solutions distinctes : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ **et** $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Exemples : $-3x^2 + 7x - 5 = 0$, donc $\Delta = b^2 - 4ac = -11$, négatif, donc il n'y a pas de solution.

$4x^2 - 12x + 1 = 0$, donc $\Delta = b^2 - 4ac = 128$, positif. $\sqrt{\Delta} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$, donc il y a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{12-8\sqrt{2}}{8} = \frac{12}{8} - \frac{8\sqrt{2}}{8} = \frac{3}{2} - \sqrt{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3}{2} + \sqrt{2}.$$

Résolution à l'aide d'un programme à la calculatrice :

• Sur T.I. 82 Stats, 83, 84

```
PROGRAM:ADEGRE2
:Prompt A,B,C
:B²-4AC→D
:Disp "DELTA",D▸
Frac
:If D>0
:Then
:Disp "2 SOL"
:Disp (-B-√(D))/
(2A)▸Frac,(-B+√(
D))/(2A)▸Frac
:Else
:If D=0
:Then
:Disp "1 SOL",-B
/(2A)▸Frac
:Else
:Disp "0 SOL"
:End
```

• Sur Casio 35 +, 85

```
======ADEGRE2 ======
"A "?→A:"B "?→B:"C "?
→C↵
"DELTA"↵
B²-4AC→D◢
If D>0↵
Then "2 SOL"↵
(-B-√D)÷(2A)◢
(-B+√D)÷(2A)◢
Else If D=0↵
Then "1 SOL"↵
-B÷(2A)◢
Else "0 SOL"↵
Stop
```

• *Exemple*

On résout l'équation :

$$0{,}02\,x^2 - 3{,}55\,x - 90 = 0$$

PRGM **EXEC 1:ADEGRE2** ENTER

```
PrgmADEGRE2
A=?0.02
B=?-3.55
C=?-90
DELTA
         7921/400
2 SOL
            -45/2
              200
             Done
```

7 Résoudre en utilisant Δ et donner les solutions sous forme simplifiée s'il y a lieu.

a) $4x^2 - 7x - 2 = 0$; b) $-x^2 + 2x + 3 = 0$;

c) $\frac{3}{2}x^2 - x + \frac{2}{3} = 0$; d) $-\frac{3}{2}x^2 - \frac{x}{10} + 4 = 0$.

8 Reprendre l'exercice **7** en simplifiant $\sqrt{\Delta}$.

a) $x^2 - 4x - 14 = 0$; b) $-4x^2 + 4x + 11 = 0$;

c) $-2x^2 + 2x + \frac{7}{2} = 0$; d) $3x^2 - 4x - \frac{1}{3} = 0$.

9 Résoudre à l'aide du programme ci-dessus.

a) $120x^2 - 586x + 301 = 0$; b) $-0{,}05\,x^2 + 5{,}12\,x - 12 = 0$;

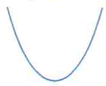
c) $-x^2 - 44x + 672 = 0$.

2.2. Signe du trinôme $ax^2 + bx + c = 0$

Les **racines** du trinôme sont les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ lorsque $\Delta \geqslant 0$.

Suivant le signe de a, coefficient de x^2, on obtient l'allure de la parabole :

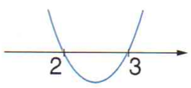
• si $a > 0$ (positif)



la parabole est tournée **vers le haut**

Exemple : $P(x) = x^2 - 5x + 6$

a pour racines 2 et 3, donc la parabole traverse l'axe des abscisses :



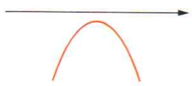
x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$P(x)$		+	0	−	0	+	

• si $a < 0$ (négatif)

la parabole est tournée **vers le bas**

Exemple : $P(x) = -3x^2 + 7x - 5$

n'a pas de racine, donc la parabole ne traverse pas l'axe des abscisses :



x	$-\infty$		$+\infty$
$P(x)$		−	

10 Étudier le signe des trinômes suivants, en calculant les racines.

a) $5x^2 - 4x + 6$; b) $-x^2 + 12x + 160$;

c) $0{,}5x^2 - 3x + 4$; d) $-3x^2 + 1504\,x - 2000$.

3 Calculs sur les fractions

3.1. Réduire au même dénominateur

Pour écrire une somme de fractions sous la forme d'un quotient :

① on cherche les **valeurs interdites** et le dénominateur commun DC le plus petit ;

② par multiplication, on réduit chaque fraction à ce dénominateur commun ;

③ on ajoute les numérateurs et on calcule la somme au numérateur.

Attention, on ne développe pas le dénominateur.

Exemple : $A(x) = \dfrac{2}{x-1} + \dfrac{3x-1}{2x} - \dfrac{x^2+5}{x^2-x}$.

① **Valeurs interdites :** $x - 1 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x = 1}$; $2x = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x = 0}$; $x^2 - x = x\,(x-1)$, nul en 0 et en 1.
DC $= (x-1) \times 2x = 2x\,(x-1)$ avec **1 et 0** comme valeurs interdites.

② On réduit au même dénominateur :

$$A(x) = \frac{2\,(2x) + (3x-1)(x-1) - 2(x^2+5)}{2x\,(x-1)} = \frac{4x + 3x^2 - 3x - x + 1 - 2x^2 - 10}{2x\,(x-1)} = \frac{x^2-9}{2x\,(x-1)}.$$

⚠ $-\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{D}} = \dfrac{-(\mathrm{N})}{\mathrm{D}}$; $\dfrac{-\mathrm{N}}{-\mathrm{D}} = \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{D}}$; $-A \times B = (-A) \times B = A \times (-B)$.

11 Réduire en un seul quotient, sans oublier les valeurs interdites.

$A(x) = -x + 4 + \dfrac{3}{x}$; $B(x) = -x^2 + 3x + \dfrac{2}{x}$;

$C(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{2x} + 1$; $D(x) = \dfrac{-5}{2x} + 2 - \dfrac{1}{3x}$.

12 Réduire en un seul quotient, sans oublier les valeurs interdites.

$A(x) = \dfrac{4}{x} - 3 + \dfrac{1}{x-2}$; $B(x) = 5 - \dfrac{2x+1}{x-2}$;

$C(x) = 1 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{3x+2}{x^2}$; $D(x) = \dfrac{1}{2x} + \dfrac{3}{x} - \dfrac{x+1}{x^2}$.

13 Réduire en un seul quotient, sans oublier les valeurs interdites.

$A(x) = 3x - 1 - \dfrac{x+1}{x+2}$; $B(x) = 2x + 1 - \dfrac{4}{1-x}$;

$C(x) = \dfrac{2}{x-1} - \dfrac{1}{2x}$; $D(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3}{4x} + 1$.

14 Réduire en un seul quotient, sans oublier les valeurs interdites.

$A(x) = \dfrac{4}{x} - \dfrac{x-1}{2x^2} + 1$; $B(x) = \dfrac{4}{3x} - \dfrac{1}{x^2}$;

$C(x) = \dfrac{2x+1}{x-2} - \dfrac{x^2-3}{x^2-2x} + \dfrac{3}{x}$.

3.2. Diviser un produit par un nombre et simplifier une fraction

Pour diviser $A \times B$ par C ($C \neq 0$), on divise A par C **ou bien** on divise B par C :

$$\frac{A \times B}{C} = \frac{A}{C} \times B = A \times \frac{B}{C}.$$

Exemples :

- $\dfrac{4x\,(x^2+2)}{8} = \dfrac{4x}{8}(x^2+2) = \dfrac{x}{2}(x^2+2)$.
- $\dfrac{x^2+4x}{x^2-16} = \dfrac{x\,(x+4)}{(x+4)(x-4)} = \dfrac{x}{x-4}$: on simplifie par $x + 4$. 4 et -4 sont valeurs interdites.

15 Rendre l'écriture plus simple.

a) $\dfrac{-9x\,(x^2+4)}{6}$; b) $\dfrac{(4-x)(3-6x)}{12}$;

c) $\dfrac{4x^2\,(x-4)}{-0{,}8}$; d) $\dfrac{(9x+6)(x-4)}{12}$.

16 Donner les valeurs interdites et simplifier.

a) $A(x) = \dfrac{8-2x}{x^2-4x}$; b) $B(x) = \dfrac{(x-3)^2-1}{(x-3)(x-2)}$;

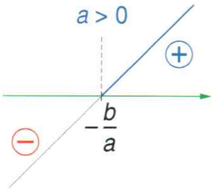
c) $C(x) = \dfrac{4-x^2}{4x-8}$; d) $D(x) = \dfrac{(4x-1)(4x-3)}{4-(4x-1)^2}$.

► Voir TB 7

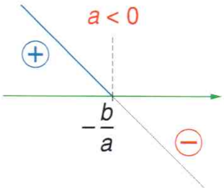
4 Signe d'expressions

4.1. Expressions particulières

• Signe de $ax + b$

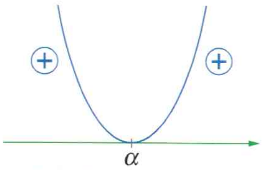


x	-3
$x+3$	$-$ 0 $+$



x	1
$-x+1$	$+$ 0 $-$

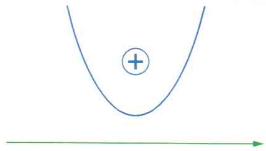
• Signe d'un carré $(\ldots)^2$



nul en une valeur α

x	2
$(x-2)^2$	$+$ 0 $+$

• Signe de $(\ldots)^2$ + *nombre positif*



aucune valeur donne 0

x	
$4x^2+1$	$+$

pas de valeur

17 Étudier le signe :

$A(x) = \frac{x}{3} - 4$; $B(x) = \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2$; $C(x) = -\frac{3x}{5}$;

$D(x) = x^2 + 1$; $E(x) = -(2x+1)^2$; $F(x) = -x^2 - 4$.

18 Étudier le signe :

$A(x) = (5x-1)^2 + 4$; $B(x) = -\frac{4}{5}x + \frac{1}{25}$;

$C(x) = -(4x+8)^2 - 1$; $D(x) = -2x$.

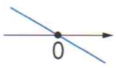
4.2. Signe d'un produit ou d'un quotient

Pour étudier le signe d'une expression :
- on l'écrit sous forme **d'un produit** ou **d'un quotient** de facteurs du 1er ou du 2^{e} degré ;
- on étudie le signe de chaque facteur dans un tableau de signes ;
- on applique la règle des signes.

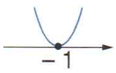
Pour le 1er degré, on visualise la droite d'équation $y = ax + b$ et on résout $ax + b = 0$.
Pour le 2^{e} degré, on cherche les solutions de $ax^2 + bx + c = 0$; on trace l'allure de la parabole, elle traverse (ou non) l'axe des abscisses et on lit le signe.

Exemple : $A(x) = \dfrac{-2x\,(x+1)^2}{4 - x^2}$ forme quotient de 3 facteurs

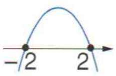
x		-2		-1		0		2	
$-2x$	$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$
$(x+1)^2$	$+$		$+$	0	$+$		$+$		$+$
$4-x^2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$
$P(x)$	$-$	‖	$+$	0	$+$	0	$-$	‖	$+$



$y = -2x$; $-2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.



$y = (x+1)^2$; $(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.



$y = 4 - x^2$; $4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ ou 2 .

Double barre pour les valeurs interdites

19 Étudier le signe :

$A(x) = \frac{-5x\,(x^2+9)}{(x-1)^2}$; $B(x) = \frac{-4x+5}{x^2-1}$;

$C(x) = \frac{3x^2-2x-1}{9-x}$; $D(x) = \frac{-(x-3)^2}{x^2+1}$.

20 Étudier le signe :

$A(x) = \frac{2x}{3}(x-3)^2$; $B(x) = \frac{-4x\,(x+4)}{x^2+4}$;

$C(x) = \frac{4x^2-4x+1}{4x}$; $D(x) = \frac{x^2-5x+4}{9-x^2}$.

21 Écrire sous forme de quotient et étudier le signe.

$A(x) = -x + 1 + \frac{4}{x-1}$; $B(x) = \frac{2}{3}x - 1 + \frac{1}{x+2}$;

$C(x) = \frac{2x+3}{x} + \frac{4}{x-6}$; $D(x) = \frac{1}{x} - \frac{5-3x}{x+1}$.

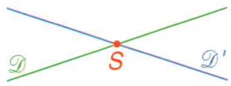
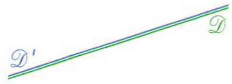
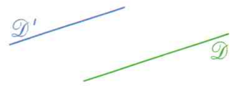
22 Étudier le signe :

$A(x) = \frac{1}{2} + \frac{x-3}{x} - \frac{x^2-1}{2x}$;

$B(x) = \frac{2x-1}{x+2} - \frac{3x-5}{x^2+2x} + \frac{x-2}{x}$.

5 Systèmes

5.1. Système de deux équations à deux inconnues

Système d'inconnues x et y			
$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$	Si a, b et a', b' sont non proportionnels : une seule solution	Si a, b, c et a', b', c' sont proportionnels : une infinité de solutions	Si a, b et a', b' seulement sont proportionnels : aucune solution

Exemple : $\begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 1 \\ x + 4y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ x + 4y = -2 \end{cases}$ On a multiplié par 6 pour ne plus avoir de fraction. Les coefficients ne sont pas proportionnels.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -4y - 2 \\ 2(-4y - 2) + 3y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4y - 2 \\ -5y - 4 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 10/(-5) = -2 \\ x = -4(-2) - 2 = 6 \end{cases}$ La solution est le **couple** : $(6\,;-2)$

23 Indiquer si les systèmes ont une unique solution :

a) $\begin{cases} 3x - 5y = 10 \\ \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{5} = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 0{,}2x + y = 2 \\ x + 5y = 10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 4y = 12{,}5 \\ 0{,}4x - 1{,}6y = 0{,}5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 4x - y = 7 \\ x - 4y = 7 \end{cases}$

24 Résoudre les systèmes sans utiliser la calculatrice, pour aucun calcul.

a) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + 5y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 2y + 1 = 0 \\ 4x + y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 10x + 20y = 40 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 0{,}3x + 1{,}5y = 0{,}9 \\ x + 5y = 4 \end{cases}$

5.2. Systèmes à trois inconnues et plus

On applique la méthode par substitution, surtout quand les coefficients sont simples.

Exemple : $\begin{cases} 2x + y + z = 12 \\ x + 3y + 4z = 23 \\ 3x + 2y + z = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2x - y + 12 \\ x + 3y + 4(-2x - y + 12) = 23 \\ 3x + 2y + (-2x - y + 12) = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2x - y + 12 \\ -7x - y = -25 \\ x + y = 7 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z = -2x - y + 12 \\ y = 7 - x \\ 7x + (7 - x) = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x = 25 - 7 \\ y = 7 - x \\ z = -2x - y + 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{18}{6} = 3 \\ y = 7 - 3 = 4 \\ z = -2 \times 3 - 4 + 12 = 2 \end{cases}$ La solution est le **triplet** : $(3\,;4\,;2)$.

Sinon, on utilise le calcul matriciel, vu en spécialité :

- on entre les coefficients dans $[A] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ et les seconds membres dans $[B] = \begin{bmatrix} 12 \\ 23 \\ 19 \end{bmatrix}$
- on calcule $[A]^{-1} \times [B]$ et on obtient la solution :

```
[A]
          [[2 1 1]
           [1 3 4]
           [3 2 1]]
```

```
[A]-1*[B]
          [[3]
           [4]
           [2]]
```

25 Résoudre « à la main » :

a) $\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x - y + 2z = 3 \\ 5x + 3y - z = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 2y - 3z = 5 \\ 4x + 3y + 2z = -5 \\ 2x + 2y + z = -2 \end{cases}$

26 Résoudre :

a) $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + 2y = 0 \\ 3y + z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x + y - z = 1 \\ -x + 2y + z = 8 \end{cases}$

27 Résoudre :

a) $\begin{cases} 2a = 6 \\ 2b - a = -11 \\ c - b = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -4a = 12 \\ 3a - 4b = -9 \\ 3b + c = 1 \end{cases}$

28 Résoudre :

a) $\begin{cases} a - b + c = 1 \\ a + b + c = 3 \\ 4a + 2b + c = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -a + b + c = -3 \\ a - c = 0 \\ b + \dfrac{c}{2} = -\dfrac{5}{2} \end{cases}$

6 Puissances et chiffres significatifs

6.1. Règles de base

Pour tout réel a non nul, par convention, $a^0 = 1$ et $a^1 = a$; $\dfrac{1}{a} = a^{-1}$ et $\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$;

Pour tous les réels a et b non nuls, tous les entiers relatifs n et p :

$$a^n \times a^p = a^{n+p} \ ; \quad \frac{a^n}{a^p} = a^{n-p} \ ; \quad (a \times b)^n = a^n \times b^n \ ; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \ ; \quad (a^n)^p = a^{n \times p}.$$

Exemples :

$$\frac{3^{n-1} \times 9}{6^n} = \frac{3^{n-1} \times 3^2}{(2 \times 3)^n} = \frac{3^{n-1+2}}{2^n \times 3^n} = \frac{3^{n+1-n}}{2^n} = \frac{3}{2^n} \text{ qui s'écrit aussi } 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$15 \times 3^{n-2} - 9 \times 3^{n-1} + 2 \times 3^n = 15 \times \frac{3^n}{3^2} - 9 \times \frac{3^n}{3} + 2 \times 3^n = \frac{15}{3^2} \times 3^n - 3 \times 3^n + 2 \times 3^n \quad \text{on met } 3^n \text{ en facteur}$$

$$= 3^n\left(\frac{5}{3} - 3 + 2\right) = 3^n\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} \times 3^n.$$

29 Simplifier au maximum :

a) $\dfrac{3^{n+2} \times 3^{2n}}{3^{n+3}}$; b) $\dfrac{2^{n+1} \times 2^n}{(2^n)^2}$; c) $\dfrac{(2 \times 3)^n}{(2^{n-1})^2}$.

30 **Q.C.M.** Indiquer les bonnes réponses. e est un réel non nul.

on a	ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓓ
$\dfrac{(e^2)^3}{e^{-1}}$	e^6	e^7	e^5	e^9
$e^4 \times e^2$	e^6	$(e^2)^4$	$(e^4)^2$	$(e^3)^2$
$\dfrac{(2e)^5}{3}$	$\dfrac{2^5 \times e^5}{3^5}$	$\dfrac{2^5 \times e^5}{3}$	$\dfrac{1}{3(2e)^{-5}}$	$\dfrac{2e^5}{3}$

31 Écrire sous la forme $A \times (B)^n$, où A et B sont des entiers naturels.

a) $5^{n-1} \times 2^{n+1}$; b) $3^2 \times 2^n \times 3^{-n}$;

c) $(2 \times 3^n)^2 \times 3^{2-n}$; d) $2^{n-3} \times 3^{n-2}$;

e) $5 \times 2^{n+1} - 3 \times 2^n$; f) $-3 \times 4^n + 5 \times 2^{2n+3}$.

32 Écrire sous la forme $A \times (B)^n$, où A et B sont des entiers naturels, ou des produits ou quotients d'entiers naturels.

a) $\dfrac{4^{n+1} \times 3^{1-n}}{2^{n+2}}$; b) $\dfrac{4^n \times 2^{n-1}}{2^{3n-1} \times 3^n}$; c) $\dfrac{(3^{n-2})^2 \times 2^{n+1}}{6^{n-1}}$.

6.2. Puissances de 10 et chiffres significatifs

Les grands ou petits nombres : 10^3 : mille ; 10^6 : un million ; 10^9 : un milliard ; 10^{-3} : un millième .
Diviser par 0,1, c'est multiplier par 10 et diviser par 0,01, c'est multiplier par 100 .

Un résultat est arrondi à **3 chiffres significatifs** lorsque l'on arrondi les **trois premiers chiffres** (autres que 0) et on complète par des zéros ou des puissances de 10.

Exemple : $\dfrac{3{,}4 \times 10^3 \times 0{,}07}{0{,}06} = \dfrac{3{,}4 \times 10^3 \times 7 \times 10^{-2} \times 10^2}{6} \approx 3{,}9666 \times 10^3 \approx 3\,970$.

⚠ Sur une calculatrice, 4.5E-4 signifie $4{,}5 \times 10^{-4}$ et 5.7E12 signifie $5{,}7 \times 10^{12}$.

```
3.4*10^3*7/6
         3966.666667
4.5*10^-4
              4.5E-4
5.7*10^12
              5.7E12
```

33 Pour chacun des polynômes $ax^2 + bx + c$, calculer, à la main, la valeur $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ et calculer $\Delta = b^2 - 4ac$.

$A(x) = -0{,}02\,x^2 + 0{,}6\,x + 3$; $B(x) = 0{,}01\,x^2 + 0{,}2\,x - 1$;
$C(x) = -0{,}005\,x^2 + 0{,}4\,x + 3$; $D(x) = 0{,}003\,x^2 + 0{,}12\,x - 1$;
$E(x) = 2\,000\,x^2 - 400x + 10$; $F(x) = -300\,x^2 + 20\,x - 5$.

34 Écrire les nombres suivants en écriture décimale à virgule, sans utiliser la calculatrice.

$A(x) = 243 \times 10^{-2} - 1{,}23 + 2$; $B(x) = \dfrac{1{,}2 \times 10^5 - 432 \times 10^3}{10^4}$;

$C(x) = 5{,}304 \times 10^2 + 43\,500 \times 10^{-2} - 0{,}0004 \times 10^3$;
$D(x) = 85 \times 10^{-2} + 0{,}005 \times 10^2 - 0{,}43 \times 10$.

35 Calculer à la calculatrice, et donner le résultat arrondi à 3 chiffres significatifs.

a) $2{,}03^3 \times 0{,}97^2$; b) $(1 - 0{,}02)^5 \times 42\,000$;

c) $\dfrac{53 \times 1{,}3^2}{0{,}21 \times 2{,}4^3} - \dfrac{100}{9}$; d) $\dfrac{1 - 1{,}07^{10}}{1 - 1{,}07} \times 53 \times 1{,}07^6$.

36 Calculer à la calculatrice, et donner le résultat arrondi à 4 chiffres significatifs.

a) $1{,}03 \times 1{,}12 \times 0{,}98 \times 0{,}93$; b) $1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^4$;

c) $20 \times 0{,}98 \times \dfrac{1 - 0{,}98^5}{1 - 0{,}98}$; d) $2\,620 \times (1{,}05^6 - 0{,}9^6)$.

7 Transformations d'écritures

7.1. Diviser une somme par un nombre

Pour diviser $A + B$ par C (non nul), on divise A par C **et** on divise B par C : $\dfrac{A+B}{C} = \dfrac{A}{C} + \dfrac{B}{C}$.

Exemple : $\dfrac{3x^2+4x-10}{2x} = \dfrac{3x^2}{2x} + \dfrac{4x}{2x} - \dfrac{10}{2x} = \dfrac{3x}{2} + 2 - \dfrac{5}{x}$, avec 0 pour valeur interdite.

37 Écrire en une somme.

$A(x) = \dfrac{-x^2+6x-4}{2x}$; $B(x) = \dfrac{4x^2-5x+1}{x^2}$; $C(x) = \dfrac{0{,}1x-\sqrt{8}}{-0{,}02}$; $D(x) = \dfrac{-0{,}9x+\sqrt{75}}{0{,}3}$

7.2. Vérifier une écriture

On part de la forme à vérifier, on calcule (développement, réduction au même dénominateur, règles de calcul...) et on retrouve la forme de l'énoncé.

Exemples :

- Soit $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 11x + 6$. Vérifier que $f(x) = (x-2)(-x^2+4x-3)$.

$$(x-2)(-x^2+4x-3) = -x^3+4x^2-3x+2x^2-8x-12 = -x^3+6x^2-11x+6 = f(x).$$

- Soit $f(x) = \dfrac{-x^2+4x-15}{3(x-1)}$. Vérifier que $f(x) = -\dfrac{x}{3} + 1 - \dfrac{4}{x-1}$ pour tout $x \neq 1$. ► voir TB3

$$-\frac{x}{3} + 1 - \frac{4}{x-1} = \frac{-x(x-1)+3(x-1)-4\times 3}{3(x-1)} = \frac{-x^2+x+3x-3-12}{3(x-1)} = \frac{-x^2+4x-15}{3(x-1)} = f(x).$$

38 1° Soit $f(x) = x^3 - 7x - 6$.
Vérifier que $f(x) = (x+1)(x+2)(x-3)$.

2° Soit $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x - 18$.
Vérifier que $f(x) = (x-2)(x+3)^2$.

3° Soit $f(x) = -x^3 + 4x - 3$.
Vérifier que $f(x) = (x-1)(-x^2-x+3)$.

39 1° Soit $f(x) = \dfrac{2x^2-5x+3}{x-2}$.
Vérifier que $f(x) = 2x - 1 + \dfrac{1}{x-2}$.

2° Soit $f(x) = \dfrac{-(x-4)^2}{2(x-2)}$.
Vérifier que $f(x) = \dfrac{-x}{2} + 3 - \dfrac{2}{x-2}$.

7.3. Trouver une forme par identification

On part de la forme cherchée, on calcule et on identifie à la forme de l'énoncé.

Exemple : soit $f(x) = \dfrac{2x^2-3x+1}{x-2}$. Trouver a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-2}$ pour $x \neq 2$.

$ax + b + \dfrac{c}{x-2} = \dfrac{ax^2-2ax+bx-2b+c}{x-2}$ que l'on identifie à $\dfrac{2x^2-3x+1}{x-2}$ pour tout $x \neq 2$.

Il suffit de choisir $\begin{cases} a = 2 \\ -2a+b=-3 \\ -2b+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-3+2a=1 \\ c=1+2b=3 \end{cases}$ D'où $f(x) = 2x + 1 + \dfrac{3}{x-2}$, avec $x \neq 2$.

40 Soit $f(x) = \dfrac{2x^2+5x-1}{x+1}$ pour $x \neq -1$.
Trouver les réels a, b et c tels que :
$f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

41 Soit $f(x) = \dfrac{-x^2-x+15}{x-3}$ pour $x \neq 3$.
Trouver a, b et c tels que :
$f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-3}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

1 Fonction f

1.1. Les trois cadres et le vocabulaire correspondant

Par exemple, soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$ donnée par l'expression $f(x) = x^2 + 3x - 3$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

cadre fonctionnel : **fonction f**	cadre graphique : **courbe $\mathcal{C}_f$**	cadre numérique : **réel $f(x)$**
variable x image $f(x)$ $x \longmapsto f(x)$	abscisse x ordonnée $f(x)$ point $M(x\,;f(x))$ sur la courbe $\mathcal{C}_f$ $M(x\,;y) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow y = f(x)$	pour calculer une image, on remplace x par un réel de $\mathcal{D}$ dans l'écriture $f(x)$
$f(x) = x^2 + 3x - 3$ est l'expression de la fonction f	$y = x^2 + 3x - 3$ est l'équation de la courbe $\mathcal{C}_f$	$f(x) = x^2 + 3x - 3$ est la formule pour calculer $f(x)$

Attention ne pas confondre f, $\mathcal{C}_f$ et $f(x)$!

52 Dans chaque phrase, corriger les erreurs d'écriture ou de vocabulaire.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2$.

1° L'équation $x - 4$ est celle d'une droite $\mathcal{D}$.

2° La fonction $f(x)$ est une parabole.

3° Le réel $f(x)$ est le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x.

4° Sur $]-\infty\,;0]$ la fonction $f(x)$ est croissante.

5° L'équation $y = f(x)$ est l'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la droite $\mathcal{D}$.

53 Dans chaque phrase, corriger les erreurs de raisonnement.

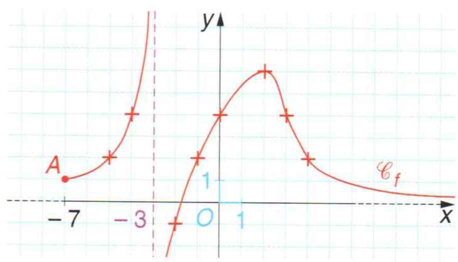
1° Soit $f(x) = x - \frac{1}{x}$, pour $x \in]-\infty\,;0[$.
Pour obtenir l'image de 1, on résout $f(x) = 1$.

2° Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe d'équation $y = x^2 - 4$.
Pour trouver le point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe (Ox), on remplace x par 0.

3° Le point $A(1\,;-3)$ est un point de la courbe $\mathcal{C}_f$ si $f(-3) = 1$.

1.2. Ensemble de définition et tableau des variations

En général, l'**ensemble de définition** est donné dans l'énoncé : c'est l'ensemble des x tels que l'expression **$f(x)$ existe** ; on écrit « fonction f définie sur $\mathcal{D}_f$ ».



Graphiquement, l'ensemble de définition se lit sur l'axe des abscisses en « aplatissant » la courbe sur l'axe des abscisses.

Exemple : La fonction f représentée ci-contre a pour ensemble de définition $[-7\,;-3[\cup]-3\,;+\infty[$.

Énoncé des variations de la fonction f :
la fonction f est croissante sur $[-7\,;-3[$ et sur $]-3\,;2]$;
la fonction f est décroissante sur $[2\,;+\infty[$.
En 2, la fonction admet un maximum local : $f(2) = 6$.
-3 est **valeur interdite** : on note une **double barre** dans le tableau.
On peut compléter le tableau par les limites.

Tableau des variations de f :

x	-7		-3		2		$+\infty$
$f(x)$	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	6	↘	0

► voir TB 17

54 Soit la fonction f représentée par la courbe $\mathcal{C}_f$.
Corriger les erreurs.

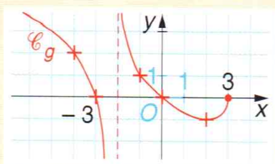
a) f est définie sur $]-6\,;3]$.

b) $f(x)$ est croissante sur $[2\,;3]$.

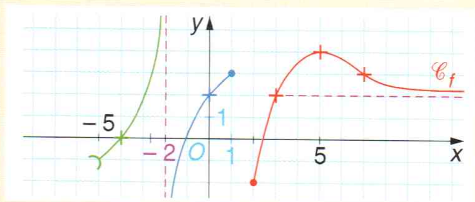
c) $f(x)$ existe sur $]-\infty\,;3]$.

d) Le minimum de f est $(2\,;-1)$.

e) Le maximum de f est $+\infty$.



55 Dresser le tableau complet des variations de la fonction f.



Signe d'expression

Signe d'un produit

Lorsque l'on a un produit de facteurs, on dresse un tableau :

- en première ligne toutes les valeurs qui annulent le produit, placées dans l'ordre croissant des valeurs ;
- une ligne pour étudier le signe de chaque facteur, sans oublier le 0 ;
- en dernière ligne, on conclut le signe du produit en appliquant la règle des signes, sans oublier les 0.

Exemple : soit $P(x) = -2x(4-x)(x+2)$.
On applique le produit nul :
$-2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $4-x = 0 \Leftrightarrow x = 4$
$x+2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

x	$-\infty$		-2		0		4		$+\infty$
$-2x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$4-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

71 Étudier le signe des produits :

$A(x) = \frac{4x}{3}(x+1)(3-x)$;

$B(x) = \left(-\frac{x}{2}+1\right)(4x+3)$;

$C(x) = (-3x+6)(x^2+1)$;

$D(x) = -5x\,(x-1)^2$.

72 Écrire sous la forme d'un produit de facteurs tous factorisés et étudier le signe :

$A(x) = \frac{4x^2}{5} - 2x$; $B(x) = 9 - x^2$;

$C(x) = 25x^2 - 5x$; $D(x) = x^3 + 4x$;

$E(x) = (x^2-2x)(x+3)^2$;

$F(x) = (x^2-4x+4)(x^2+1)$.

Signe d'un quotient

Lorsque l'on a un quotient de facteurs, on dresse un tableau :

- en première ligne toutes les valeurs qui annulent le numérateur ou le dénominateur, placées dans l'ordre croissant des valeurs,
- une ligne pour étudier le signe de chaque facteur, sans oublier le 0,
- en dernière ligne, on conclut le signe du quotient en appliquant la règle des signes, sans oublier les zéros aux valeurs annulant le numérateur et la double barre à la **valeur interdite**.

Soit $Q(x) = \frac{4x^2+x}{-x+3} = \frac{x\,(4x+1)}{-x+3}$.
$x\,(4x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -1/4$
$-x+3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$, valeur interdite.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		0		3		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$4x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$-x+3$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$Q(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	

73 Étudier le signe des quotients suivants :

1° $A(x) = \frac{4x-3}{3-2x}$; $B(x) = \frac{x+3}{3x}$;

$C(x) = \frac{1-x}{x}$.

2° $A(x) = \frac{2x-3}{2x+3}$; $B(x) = \frac{x\,(4-x)}{3+x}$.

$C(x) = \frac{(-2x+1)(x-1)}{2-x}$; $D(x) = \frac{4x^2-4x}{2x+1}$.

74 Écrire sous la forme d'un quotient et étudier le signe :

$A(x) = \frac{2x+3}{x} + \frac{9}{x-6}$; $B(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{3} - \frac{x-2}{3x}$;

$C(x) = \frac{2}{x+1} - \frac{x-2}{x-1}$; $D(x) = \frac{x-2}{4} + \frac{x+1}{2x} - \frac{x^2+1}{x}$;

$E(x) = \frac{2x-1}{2x+1} - \frac{5}{2x^2+x} + \frac{1}{2x}$.

52 b) $\{-4;5\}$; $\{0;5\}$; $\{-2;3;8\}$; $\{-1;8\}$. c) $f(x)=7$. d) $\{-2;5;11\}$.

53 a) $[-3;0]\cup[8;12]$. b) $]-4;4[\cup]7;+\infty[$.

54 a) $]-1;8[$; b) $x\in[-4;5]\cup]6;+\infty[$: $f(x)\geqslant 0$;

55 a)

x	-10		-3		3		5
$f(x)$	-2	↗	4	↘	-2	↗	0

b) $A(-8;0)$, $B(1;0)$ et $C(5;0)$;

c) $S=]-8;1[$; d) $S=[-10;-6[\cup]0;5]$.

Fonctions affines et droites

56 a) $f(x)=\frac{1}{2}(x+2)+1=\frac{1}{2}x+2$.

b) $f(x)=\frac{1}{3}(x-702)+237=\frac{1}{3}x+3$.

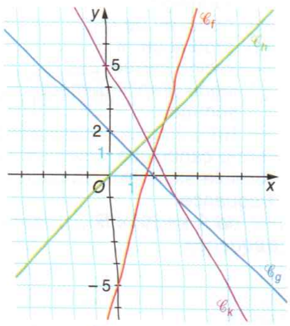
c) $f(x)=-0{,}8x+2{,}4$. d) $f(x)=-\frac{4}{3}x+\frac{5}{6}$.

57 a) Fonction affine : $a=12$; $f(x)=12x+25$.

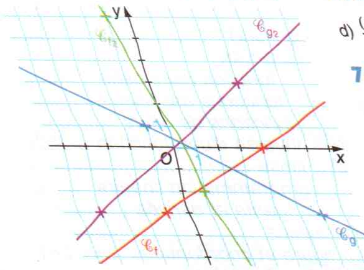
b) Non affine : $CM=0{,}97$.

58 1° f et h croissantes ;

g et k décroissantes



59



60 Seule $\mathscr{D}_3$ ne représente pas une fonction affine.

$\mathscr{D}_1$: $y=-\frac{2}{3}x+2$; $\mathscr{D}_2$: $y=-\frac{5}{3}x-4$;

$\mathscr{D}_3$: $x=3$; $\mathscr{D}_4$: $y=5$; $\mathscr{D}_5$: $y=\frac{1}{3}x+2$.

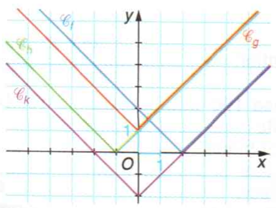
61 $\mathscr{D}_3$: non la représentation d'une fonction affine.

$\mathscr{D}_1$: $y=\frac{1}{3}x-2$;

$\mathscr{D}_2$: $y=-\frac{3}{5}(x-2)+1 \Leftrightarrow y=-\frac{3}{5}x+\frac{11}{5}$;

$\mathscr{D}_3$: $x=-1$; $\mathscr{D}_4$: $y=\frac{3}{5}x-\frac{1}{5}$.

62



63 1° 7 ; 0 ; 9 ; 2 ; 5 ; 6 ; 1.

2° 9 ; 12 ; 5 ; 6 ; 7 ; 2 ; 2.

Signe d'expression

64

x	-2		$-0{,}5$		$2{,}5$		3		4		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

65

x		-8		4	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

x		1		4		11
$g(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	

66

a)

x		5	
$5x-25$	$-$	0	$+$

c)

x		-3	
$-6x-18$	$+$	0	$-$

e)

x		3	
$\frac{x-3}{2}$	$-$	0	$+$

f)

x		$1/6$	
$-\frac{4}{5}x+\frac{2}{15}$	$+$	0	$-$

67 a) $(x-3)^2\geqslant 0$, nul en 3. b) $4x^2+1>0$, toujours.

c) $(4x^2-x)^2\geqslant 0$, nul en 0 et $\frac{1}{4}$. d) $-x^2+1<0$, toujours.

e) $(-1-x)^2\geqslant 0$, nul en -1. f) $9x^2+25>0$, toujours.

68 On a $x\leqslant 0$, donc :

a) $3x$ est négatif ; b) $-5x$ est positif ;

c) $-(x)^2$ est négatif ; d) $-x^2-4$ est négatif ;

e) x^2+1 est positif.

69 On a $x>4$, alors $x-4>0$.

a) $x-4$ positif ; b) $-2x+8=-2(x-4)$ négatif ;

c) $-3x$ est négatif, $x-4$ positif : $-3x(x-4)$ négatif.

70 a) $\frac{-3x+2}{3}$; b) $\frac{-x+1}{x+3}$; c) $\frac{x^2-x+1}{2x}$;

d) $\frac{(x+4)(x-1)}{3x}$; e) $\frac{3x(-2+x)}{x+2}$.

71

x		-1		0		3	
$A(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

x		$-3/4$		2	
$B(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

72 $A(x)=x\left(\frac{4}{5}x-2\right)$

x		0		$5/2$	
$A(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$D(x)=x(x^2+4)$

x		0	
$D(x)$	$-$	0	$+$

$E(x)=x(x-2)(x+3)^2$

x		-3		0		2	
$E(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$F(x)=(x-2)^2(x^2+1)$ toujours positif ou nul en 2.

73 1°

x		$3/2$		$3/4$	
$A(x)$	$-$	‖	$+$	0	$-$

x		-3		0	
$B(x)$	$+$	0	$-$	‖	$+$

x		0		1	
$C(x)$	$-$	‖	$+$	0	$-$

2°

x		$-3/2$		$3/2$	
$A(x)$	$+$	‖	$-$	0	$+$

x		-3		0		4	
$B(x)$	$+$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$

x		$1/2$		1		2	
$C(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$+$

$D(x)=\frac{x(4x-4)}{2x+1}$.

x		$-1/2$		0		1	
$D(x)$	$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$

74 • $A(x)=\frac{2x^2-18}{x(x-6)}=\frac{2(x+3)(x-3)}{x(x-6)}$.

x		-3		0		3		6	
$A(x)$	$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$

• $B(x)=\frac{3-4x}{3x}$

x		0		$3/4$	
$B(x)$	$-$	‖	$+$	0	$-$

• $C(x)=\frac{-x^2+3x}{(x+1)(x-1)}=\frac{x(-x+3)}{(x+1)(x-1)}$

x		-1		0		1		3	
$C(x)$	$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$

• $D(x)=\frac{x^2+2}{4x}$

x		0	
$D(x)$	$-$	‖	$+$

• $E(x)=\frac{4x^2-9}{2x(2x+1)}=\frac{(2x+3)(2x-3)}{2x(2x+1)}$.

x		$-3/2$		$-1/2$		0		$3/2$	
$E(x)$	$+$	0	$-$	‖	$+$	‖	$-$	0	$+$

Traitement des données

75 a) $\frac{15}{12}=1{,}25=\frac{5{,}45}{4{,}36}=\frac{-7{,}125}{-5{,}7}$: $L2=1{,}25\times L1$.

b) Oui, $L2=\frac{10}{3}\times L1$.

76 a) $\frac{5\times 2{,}4}{-2}=-6$; b) $\frac{0{,}05\times 18\,000}{0{,}75}=1\,200$.

77 a) $x=3$; b) $x=24$.

78 a) $x=\frac{12\times 5}{37}=\frac{60}{37}$; b) $x=\frac{4\times 3}{5}=\frac{12}{5}$;

c) $x=\frac{-3\times 5}{2}=\frac{-15}{2}$; d) $x+2=\frac{4\times 69}{23}$. $x=10$.

79 $y=6x$.

80 a) $y=-1{,}3x$; $-1{,}3\times 2=-2{,}73$; $\frac{-14{,}43}{-1{,}3}=11{,}1$. b) $y=2{,}5x$; $1{,}5\times 12=6$; $1{,}5\times(-2)=-3$; $\frac{10{,}5}{1{,}5}=7$.

81 Entrer les valeurs en list 1 de la calculatrice et demander : mean(L1). $\bar{x}=11$.

82 $\frac{0\times 136+1\times 77+\ldots+5\times 3}{136+77+\ldots+3}=1{,}1$; soit 1,1 enfant par famille.

83 $\bar{x}=\frac{14\times 37\,500+80\,900}{15}=40\,300$.

84 $\frac{4\times 9{,}8+(15-11)}{4}=10{,}8$.

85 a) $0+2+4-2{,}5+3-0{,}5+1+5=12$.

D'où $10+\frac{12}{8}=11{,}5$ de moyenne pour Maud.

b) $-1-1{,}5+6-2{,}5+2+0{,}5=3{,}5$ pour 6 notes.

Valentin : $10+\frac{3{,}5}{6}\approx 10{,}58$. c) Justine : 10,86.

86 On entre 189 ; 370 ; 127 ; 433 ; 156 et 238 ;

de moyenne $\bar{y}=\frac{1\,513}{6}\approx 252$. $\bar{x}\approx 5{,}687252$.

12 – Techniques de base

1. Calcul algébrique

1. Équation de base

1 a) -4 ; b) $-\frac{1}{2}$; c) 0 ; d) 3 ; e) 3 ; f) $\frac{1}{3}$.

2 a) 0 ; b) $\frac{1}{3}$; c) 4 ; d) 3 ; e) $\frac{5}{2}$; f) 0 .

3 1° a) $x(-4x+1)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=\frac{1}{4}$. b) $x=-1$ ou $x=1$.

c) $x\left(-x+\frac{5}{2}\right)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=\frac{5}{2}$. d) $x^2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow x=\frac{-1}{2}$ ou $x=\frac{1}{2}$.

2° a) $x^2=\frac{4}{9} \Leftrightarrow x=-\frac{2}{3}$ ou $x=\frac{2}{3}$. b) $\frac{4}{3}x^2(x-9)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=9$.

4 1° a) $x(5x-4)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=\frac{4}{5}$.

b) $3x^2-9=0 \Leftrightarrow x^2=3 \Leftrightarrow x=-\sqrt{3}$ ou $x=\sqrt{3}$.

On se ramène à $\boxed{}=0$ et on isole x^2, car il n'y a plus x .

c) Différence de deux carrés : $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

$(4x+3)(2x+2)=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$ ou $x=-1$.

d) $x^2=9 \Leftrightarrow x=-3$ ou $x=3$.

2° a) On multiplie par $\frac{3}{2}$: $x^2=2x \Leftrightarrow x(x-2)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=2$.

b) Différence de deux carrés : a^2-b^2 .

$\left(\frac{8}{5}x-\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{5}x-\frac{3}{5}\right)=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{8}$ ou $x=\frac{3}{2}$.

5 1° a) Valeur interdite 1 . On résout $4x-3=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x=\frac{3}{4}}$ non interdite.

b) -2 est V.I. $x^2-2x=0 \Leftrightarrow x(x-2)=0 \Leftrightarrow$ **$x=0$ ou $x=2$** non interdites.

2° a) 8 est V.I. Au numérateur : a^2-b^2
$(x+2)(x-8)=0 \Leftrightarrow$ **$x=-2$** non interdite, ou $x=8$ interdite.
-2 est la seule solution.

b) $\frac{1}{2}$ est V.I. **Attention**, on ne peut pas simplifier. a^2-b^2 au numérateur :

$(3x-1)(x-1)=0 \Leftrightarrow$ **$x=\frac{1}{3}$ ou $x=1$** non interdites.

6 1° a) -1 est V.I. On multiplie par $x+1 \neq 0$:

on résout $3=4(x+1) \Leftrightarrow$ **$x=-\frac{1}{4}$** non interdite.

b) $\frac{3}{2}$ est V.I. On multiplie par $2x-3 \neq 0$:

$x+2=1(2x-3) \Leftrightarrow$ **$x=5$** non interdite.

c) 0 est valeur interdite.
On résout $x^2-9=0 \Leftrightarrow$ **$x=-3$ ou $x=3$** non interdites.

2° a) 1 est V.I. $4=3(x-1) \Leftrightarrow$ **$x=\frac{7}{3}$** non interdite.

b) -4 est V.I. On résout : $2-x=2(x+4) \Leftrightarrow$ **$x=-2$** non interdite.

c) 0 est V.I. On résout : $4(x+2)=5(-2x) \Leftrightarrow$ **$x=-\frac{4}{7}$** non interdite.

2. Second degré

7 a) $\Delta=b^2-4ac=81$; $\sqrt{\Delta}=9$,

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{7-9}{8}=-\frac{1}{4}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{7+9}{8}=2$.

b) $\Delta=16$; $\sqrt{\Delta}=4$; $x_1=3$ et $x_2=-1$.
c) $\Delta=-3$, négatif, donc pas de solution.

d) $\Delta=\frac{961}{100}$; $\sqrt{\Delta}=\frac{31}{10}$; $x_1=\frac{5}{2}$ et $x_2=-\frac{8}{3}$.

8 a) $\Delta=72$; $\sqrt{\Delta}=6\sqrt{2}$. $x_1=\frac{4-6\sqrt{2}}{2}=\frac{4}{2}-\frac{6\sqrt{2}}{2}=2-3\sqrt{2}$ et $x_2=2+3\sqrt{2}$.

b) $\Delta=192$; $\sqrt{\Delta}=8\sqrt{3}$. $x_1=\frac{-4-8\sqrt{3}}{-8}=\frac{4}{8}+\frac{8\sqrt{3}}{8}=\frac{1}{2}+\sqrt{3}$ et $x_2=\frac{1}{2}-\sqrt{3}$.

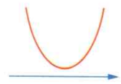
c) $\Delta=32$; $\sqrt{\Delta}=4\sqrt{2}$. $x_1=\frac{1}{2}+\sqrt{2}$ et $x_2=\frac{1}{2}-\sqrt{2}$.

d) $\Delta=20$; $\sqrt{\Delta}=2\sqrt{5}$. $x_1=\frac{4-2\sqrt{5}}{6}=\frac{2(2-\sqrt{5})}{2\times 3}=\frac{2-\sqrt{5}}{3}$ et $x_2=\frac{2+\sqrt{5}}{3}$.

9 a) $x=\frac{7}{12}$ ou $x=\frac{43}{10}$. b) $x=100$ ou $x=\frac{12}{5}$. c) $x=12$ ou $x=-56$.

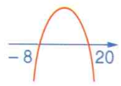
10 a) $a=5>0$
$\Delta=-104<0$
pas de racine (pas de solution à $P(x)=0$)

x	$-\infty$		$+\infty$
$5x^2-4x+6$		+	



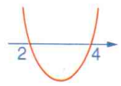
b) $a=-1<0$.
$\Delta=784$; $x_1=20$ et $x_2=-8$

x		-8		20	
$-x^2+12x+160$	$-$	0	+	0	$-$



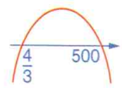
c) $a=0{,}5>0$.
$\Delta=1$; $x_1=2$ et $x_2=4$

x		2		4	
$0{,}5x^2+3x+4$	+	0	$-$	0	+



d) $a=-3<0$.
$\Delta=2\,238\,016$; $x_1=500$ et $x_2=\frac{4}{3}$

x		4/3		500	
$-3x^2+1\,504x-2\,000$	$-$	0	+	0	$-$



3. Calculs sur les fractions

11 $A(x)=\frac{-x^2+4x+3}{x}$; 0 est V.I. $B(x)=\frac{-x^3+3x^2+2}{x}$; 0 est V.I.

$C(x)=\frac{-1+2x}{2x}$; 0 est V.I. $D(x)=\frac{12x-17}{6x}$; 0 est V.I.

12 a) 0 et 2 sont valeurs interdites.

$A(x)=\frac{4(x-2)-3x(x-2)+x}{x(x-2)}=\frac{-3x^2+11x-8}{x(x-2)}$.

b) 2 est V.I. et $B(x)=\frac{3x-11}{x-2}$. c) 0 est V.I. et $C(x)=\frac{x^2-x-2}{x^2}$.

d) 0 est V.I. et $D(x)=\frac{x+3\times 2x-2(x+1)}{2x^2}=\frac{5x-2}{2x^2}$.

13 a) -2 est V.I. et $A(x)=\frac{3x^2+4x-3}{x+2}$. b) 1 est V.I. et $B(x)=\frac{-2x^2+x-3}{1-x}$.

c) 0 et 1 sont V.I. DC $=2x(x-1)$. $C(x)=\frac{2\times 2x-(x-1)}{2x(x-1)}=\frac{3x+1}{2x(x-1)}$.

d) 0 est V.I. $D(x)=\frac{4x^2+3x+4}{4x^2}$.

14 a) 0 est V.I. DC $=2x^2$. $A(x)=\frac{2x^2+7x+1}{2x^2}$.

b) 0 est V.I. DC $=3x^2$. $B(x)=\frac{4x-3}{3x^2}$.

c) 0 et 2 sont V.I. DC $=x(x-2)$.

$C(x)=\frac{x(2x+1)-(x^2-3)+3(x-2)}{x(x-2)}=\frac{x^2+4x-3}{x(x-2)}$.

15 a) $-\frac{3}{2}x(x^2+4)$; b) $\frac{1}{4}(4-x)(1-2x)=\left(1-\frac{x}{4}\right)(1-2x)$;

c) $-5x^2(x-4)$; d) $\frac{1}{4}(3x+2)(x-4)=(3x+2)\left(\frac{x}{4}-1\right)$.

16 a) 0 et 4 sont valeurs interdites. $A(x)=\frac{-2(x-4)}{x(x-4)}=\frac{-2}{x}$.

b) 2 et 3 sont V.I. a^2-b^2 au numérateur : $B(x)=\frac{\cancel{(x-2)}(x-4)}{(x-3)\cancel{(x-2)}}=\frac{x-4}{x-3}$.

c) 2 est valeur interdite. $C(x)=\frac{(2+x)(2-x)}{4(x-2)}=\frac{(2+x)(-1)}{4}=\frac{-2-x}{4}$,

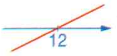
car $2-x=(-1)(x-2)$.

d) a^2-b^2 au dénominateur. V.I. $=-\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$.

$D(x)=\frac{(4x-1)(4x-3)}{(4x-1)(-4x+3)}=\frac{-4x+1}{4x+1}$.

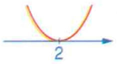
4. Signe d'expressions

17 a)



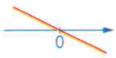
x		12	
$\frac{x}{3} - 4$	$-$	0	$+$

b)



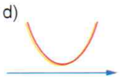
x		2	
$\left(1 - \frac{x}{2}\right)^2$	$+$	0	$+$

c)



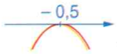
x		0	
$\left(-\frac{3x}{5}\right)$	$+$	0	$-$

d)



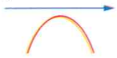
x	
$x^2 + 1$	$+$

e)



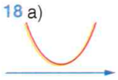
x		$-0{,}5$	
$-(2x+1)^2$	$-$	0	$-$

f)



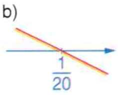
x	
$-x^2 - 4$	$-$

18 a)



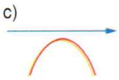
x	
$A(x)$	$+$

b)



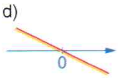
x		$\frac{1}{20}$	
$B(x)$	$+$	0	$-$

c)



x	
$C(x)$	$-$

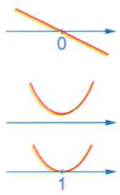
d)



x		0	
$D(x)$	$+$	0	$-$

19

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$-5x$		$+$	0	$-$		$-$	
x^2+9		$+$		$+$		$+$	
$(x-1)^2$		$+$		$+$	0	$+$	
$A(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	

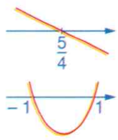


$-5x$

x^2+9

$(x-1)^2$

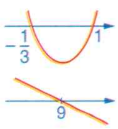
x	$-\infty$		-1		1		$\frac{5}{4}$		$+\infty$
$-4x+5$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$B(x)$		$+$	‖	$-$	‖	$+$	0	$-$	



$-4x+5$

x^2-1

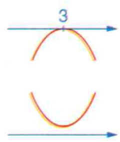
x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		9		$+\infty$
$3x^2-2x-1$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$9-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$C(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	‖	$-$	



$3x^2-2x-1$

$9-x$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$-(x-3)^2$		$-$	0	$-$	
x^2+1		$+$		$+$	
$D(x)$		$-$	0	$-$	

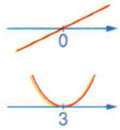


$-(x-3)^2$

x^2+1

20

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$\frac{2x}{3}$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-3)^2$		$+$		$+$	0	$+$	
$A(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

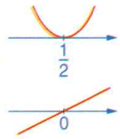


$\frac{2x}{3}$

$(x-3)^2$

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
$-4x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2+4		$+$		$+$		$+$	
$B(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

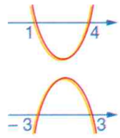
x	$-\infty$		0		1/2		$+\infty$
$(2x-1)^2$		$+$		$+$	0	$+$	
$4x$		$-$	0	$+$		$+$	
$C(x)$		$-$	‖	$+$	0	$+$	



$(2x-1)^2$

$4x$

x	$-\infty$		-3		1		3		4		$+\infty$
x^2-5x+4		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$9-x^2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$D(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	

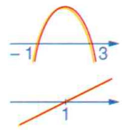


x^2-5x+4

$9-x^2$

21 $A(x) = \dfrac{(-x+1)(x-1)+4}{x-1} = \dfrac{-x^2+2x+3}{x-1}$.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$-x^2+2x+3$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$A(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	

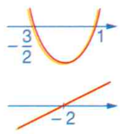


$-x^2+2x+3$

$x-1$

$B(x) = \dfrac{\left(\frac{2}{3}x-1\right)(x+2)+1}{x+2} = \dfrac{\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x-1}{x+2}$.

x	$-\infty$		-2		$-\frac{3}{2}$		1		$+\infty$
$\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x+1$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$B(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

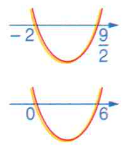


$\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x+1$

$x+2$

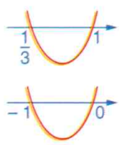
$C(x) = \dfrac{2x^2-5x-18}{x(x-6)}$.

x	$-\infty$		-2		0		$\frac{9}{2}$		6		$+\infty$
$2x^2-5x-18$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x(x-6)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$C(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	



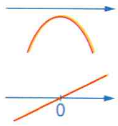
$D(x) = \dfrac{3x^2-4x+1}{x(x+1)}$.

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{3}$		6		$+\infty$
$3x^2-4x+1$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$D(x)$		$+$	‖	$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	



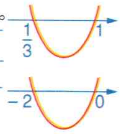
22 $A(x) = \dfrac{-x^2+3x-5}{2x}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-x^2+3x-5$		$-$		$-$	
$2x$		$-$	0	$+$	
$A(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	



$B(x) = \dfrac{3x^2-4x+1}{x^2+2x}$.

x	$-\infty$		-2		0		$1/3$		1		$+\infty$
$3x^2-4x+1$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
x^2+2x		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$B(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	



5. Systèmes

23 a) $\begin{cases} 3x-5y=10 \\ 5x-3y=30 \end{cases}$ unique solution.

b) $\begin{cases} x+5y=10 \\ x+5y=10 \end{cases}$ mêmes équations : infinité de solutions.

c) $\begin{cases} x-4y=12{,}5 \\ 4x-16y=5 \end{cases}$ $4\times 12{,}5 \neq 5$, donc pas de solution.

d) Unique solution.

24 a) $(3\,;-1)$; b) $(1\,;\,2)$; c) $(2\,;\,1)$; d) Pas de solution.

25 a) $(0\,;1\,;2)$; b) $(-1\,;1\,;-2)$.

26 a) $(2\,;-1\,;3)$; b) $(0\,;3\,;2)$.

27 a) $a=3$; $b=-4$ et $c=1$: une solution $(3\,;-4\,;1)$.
b) $a=-3$; $b=0$ et $c=1$: une solution $(-3\,;0\,;1)$.

28 a) $a=-2$; $b=1$ et $c=4$.
b) Multiplier la 3ᵉ par 2 : $2b+c=5$. D'où $a=1$; $b=-3$ et $c=1$.

6. Puissances et chiffres significatifs

29 a) $3^{n+2+2n-n-3} = 3^{2n-1}$. b) $2^{n+1-n-2n} = 2^{-2n+1}$.

c) $\dfrac{2^n\times 3^n}{2^{2n-2}} = 2^{n-2n+2}\times 3^n = 2^{-n+2}\times 3^n$.

30 1° $\dfrac{(e^2)^3}{e^{-1}} = e^{6+1} = e^7$ ⓑ 2° ⓐ et ⓓ 3° ⓑ et ⓒ

31 a) $5^n\times 5^{-1}\times 2^n\times 2 = \dfrac{2}{5}\times 10^n$; b) $3^2\times\dfrac{2^n}{3^n} = 9\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

c) $2^2\times 3^{2n}\times 3^2\times 3^{-n} = 4\times 9\times 3^n = 36\times 3^n$.

d) $2^n\times 2^{-3}\times 3^n\times 3^{-2} = \dfrac{1}{8\times 9}\times(2\times 3)^n = \dfrac{1}{72}\times 6^n$.

e) $5\times 2^n\times 2 - 3\times 2^n = 2^n\times(10-3) = 7\times 2^n$.

f) $-3\times 2^{2n} + 5\times 2^{2n}\times 2^3 = 2^{2n}(-3+5\times 8) = 37\times 2^{2n}$.

32 a) $(2^2)^{n+1}\times 3\times 3^{-n}\times 2^{-n}\times 2^{-2} = 2^2\times 3\times 2^{-2}\times 2^{2n}\times 3^{-n}\times 2^{-n} = 3\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

b) $\dfrac{2^{2n}\times 2^{n-1}}{2^{3n-1}\times 3^n} = \dfrac{2^{2n+n-1-3n+1}}{3^n} = 2^0\times 3^{-n} = 3^{-n}$.

c) $3^{2n}\times 3^{-4}\times 2^n\times 2\times(2\times 3)^{-n+1} = 2\times 2\times 3^{-4+1}\times 3^{2n}\times 2^n\times 2^{-n}\times 3^{-n}$
$= \dfrac{4}{27}\times 3^n$.

33 a) $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-0{,}6}{-0{,}004} = \dfrac{60}{4} = 15$. $\Delta = b^2-4ac = 0{,}36 + 0{,}04\times 3 = 0{,}6$.

b) $\alpha = \dfrac{-0{,}2}{0{,}02} = -10$. $\Delta = 0{,}04 + 0{,}04 = 0{,}08$.

c) $\alpha = \dfrac{-0{,}4}{-0{,}01} = 40$. $\Delta = 0{,}16 + 0{,}02\times 3 = 0{,}22$.

d) $\alpha = -20$ et $\Delta = 0{,}0264$.

e) $\alpha = \dfrac{400}{4\,000} = \dfrac{1}{10} = 0{,}1$. $\Delta = 160\,000 - 40\times 2\,000 = 80\,000$.

f) $\alpha = \dfrac{-20}{-600} = \dfrac{1}{30}$. $\Delta = 400 - 20\times 300 = -5\,600$.

34 $A(x) = 2{,}43 - 1{,}23 + 2 = 3{,}2$.

$B(x) = \dfrac{12\times 10^4 - 43{,}2\times 10^4}{10^4} = 12 - 43{,}2 = -31{,}2$.

$C(x) = 530{,}4 + 435 - 0{,}4 = 965$.
$D(x) = 0{,}85 + 0{,}5 - 4{,}3 = -2{,}95$.

35 Résultats arrondis à 3 chiffres significatifs.
a) 7,87 ; b) 38 000 ; c) 19,7 ; d) 1 100.

```
2.03^3*0.97²
         7.871030264
(1-0.02)^5*42000
         37964.67347
```

```
(53*1.3^2)/(0.21
*2.4^3)-100/9
         19.74275243
(1-1.07^10)/(1-1
.07)*53*1.07^6
         1098.942429
```

36 Résultats arrondis à 4 chiffres significatifs.
a) $1\,051\times 10^{-3} = 1{,}051$; b) $5\,177\times 10^{-4} = 0{,}5177$; c) $9\,416\times 10^{-2} = 94{,}16$;
d) 2 119.

```
1.03*1.12*0.98*0
.93
          1.05139104
1-(5/6)^4
         .5177469136
```

```
20*0.98*(1-0.98^
5)/(1-0.98)
         94.15761914
2620*(1.05^6-0.9
^6)
         2118.675158
```

7. Transformations d'écritures

37 $A(x) = -\dfrac{x}{2} + 3 - \dfrac{4}{2x}$; 0 est valeur interdite. $B(x) = 4 + \dfrac{5}{x} + \dfrac{1}{x^2}$; 0 est V.I.

$C(x) = -5x + 100\sqrt{2}$. $D(x) = -3x + \dfrac{50\sqrt{3}}{3}$.

38 1° On développe :
$(x+1)(x+2)(x-3) = (x^2+3x+2)(x-3)$...
2° Développer le carré en premier.
3° On développe.

39 1° On réduit au même dénominateur.
⚠ Rédaction, ne pas commencer par $f(x) = \ldots$
2° Réduire au même dénominateur la 1ʳᵉ forme.
Développer la 2ᵉ forme.

40 $f(x) = 2x + 3 - \dfrac{4}{x+1}$ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

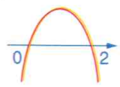
41 $f(x) = -x - 4 + \dfrac{3}{x-3}$ sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

2. Méthodologie

2. Analyser les verbes d'un énoncé

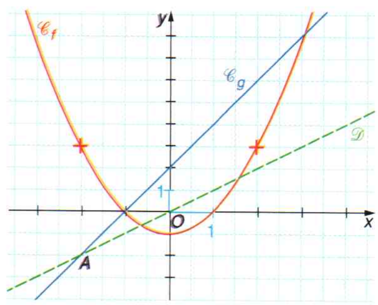
42 a) $P(-2) = -4 - 4 + 15 = 7$.
b) $P(3) - P(\sqrt{5}) = 2 - 2\sqrt{5} \approx -2{,}47$.
c) On développe $-(x-1)^2 + 16$.
d) $P(2) = 15$ et $P(0) = 15$. Donc $P(2) = P(0)$.
e) Si $x_1 > x_2 > 1$, alors $-(x_1-1)^2 + 16 < -(x_2-1)^2 + 16$.
D'où $P(x_1) < P(x_2)$.
f) $P(1-h) = -h^2 + 16$.
g) $P(x) = 15 \Leftrightarrow x(-x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$.
h) $P(x) \geqslant 16 \Leftrightarrow -(x-1)^2 \geqslant 0$.
seule solution : $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

i) $P(x) \leqslant 15 \Leftrightarrow x(-x+2) \leqslant 0$.



$S =]-\infty\,;0] \cup [2\,;+\infty[$.

43 a) $\mathscr{C}_f$ est la translatée de $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$ par la translation de vecteur $-\vec{j}$.
b) f est une fonction du 2ᵉ degré, croissante sur $[0\,;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty\,;0]$. Son minimum est $f(0) = -1$.
c) Les solutions sont les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
$S = \{-1\,;3\}$.
► Voir TB13
d) Les solutions sont les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ situés au-dessus de $\mathscr{C}_g$.
$S =]-1\,;3[$.
► Voir TB14
e) $\left.\begin{array}{l} A \in \mathscr{D} \\ A \in \mathscr{C}_g \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ y = 2x+2 \end{cases}$



4. Fonction affine et droite

61 1° On cherche f telle que $f(q) = aq + b$.

q	1,5	4
$f(q)$	4,5	15

$a = \dfrac{\Delta f(q)}{\Delta q} = \dfrac{15 - 4{,}5}{4 - 1{,}5} = 4{,}2$.

$f(q) = 4{,}2(q - 4) + 15 = 4{,}2q - 1{,}8$.

2° $f(5{,}8) = 22{,}56$.

Coût marginal de 22,56 k€ par tonne ou 22,56 € par kg.

62 a) On cherche une fonction affine $P(x) = ax + b$.

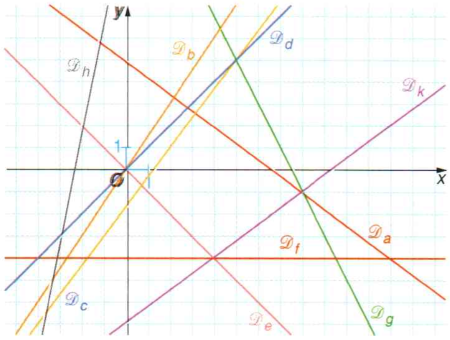
$a = -\dfrac{150}{1\,000} = -0{,}15$ et en $x = 30$, $P(30) = \dfrac{2\,500}{1\,000} = 2{,}5$.

D'où $P(x) = -0{,}15(x - 30) + 2{,}5 = -0{,}15x + 7$.

b) En 2005, on a $x = 35$ et $P(35) = 1{,}75$.

Donc la population sera de 1 750 habitants dans le village.

63



64 Attention aux unités !

$\mathscr{D}_1 : y = -2x + 4$. $\mathscr{D}_2 : y = -3x$.

$\mathscr{D}_3 : y = \dfrac{2}{5}(x + 4) + 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{2}{5}x + \dfrac{8}{5}$.

$\mathscr{D}_4 : y = 3(x - 1{,}5) - 3 \Leftrightarrow y = 3x - 7{,}5$.

$\mathscr{D}_5 : y = -6(x + 1) - 2 \Leftrightarrow y = -6x - 8$.

5. Nombre dérivé et tangente

65 a) $f(2 + h) = 2h + 5 - \dfrac{1}{2 + h} = \dfrac{2h^2 + 9h + 9}{2 + h}$. $f(2) = 5 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{9}{2}$.

$f(2 + h) - f(2) = \dfrac{2h^2 + 9h + 9}{2 + h} - \dfrac{9}{2} = \dfrac{4h^2 + 18h + 18 - 18 - 9h}{2(2 + h)} = \dfrac{4h^2 + 9h}{2(2 + h)}$.

$\dfrac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \dfrac{\cancel{h}(4h + 9)}{\cancel{h}[2(2 + h)]} = \dfrac{4h + 9}{4 + 2h}$.

Si $h \to 0$, alors $\dfrac{4h + 9}{4 + 2h} \to \dfrac{9}{4}$. Donc le nombre dérivé de f en 2 est $f'(2) = \dfrac{9}{4}$.

```
nDeriv(Y1,X,2)
    2.250000063
```

66 a) $f'(x) = -2x - \dfrac{3}{x^2}$; $f'(2) = -4{,}75$ et $f'(-1) = -1$

b) $f'(x) = \dfrac{2}{x^2}$; $f'(1) = 2$ et $f'(-2) = 0{,}5$.

c) $f'(x) = \dfrac{-8}{x^3} - 1$; $f'(-2) = 0$ et $f'(1) = -9$.

```
nDeriv(Y1,X,2)
   -4.750000188
nDeriv(Y1,X,-1)
   -1.000003
nDeriv(Y2,X,1)
    2.000002
```

```
nDeriv(Y2,X,-2)
    .500000125
nDeriv(Y3,X,-2)
        5E-7
nDeriv(Y3,X,1)
   -9.000016
```

67 a) $f(1) = 4$; $f'(1) = 0$, tangente horizontale. Tangente en B : $y = 4$.

b) $f(-2) = 0$; $f'(-2) = 3$. Tangente en C : $y = 3(x + 2) + 0 \Leftrightarrow y = 3x + 6$.

68 a) $f'(x) = \dfrac{-5}{(x - 2)^2}$.

b) $f(1) = -1$ et $f'(1) = -5$. Tangente T : $y = -5(y - 1) - 1 \Leftrightarrow y = -5x + 4$.

c) $f(0) = \dfrac{3}{2}$ et $f'(0) = \dfrac{-5}{4}$. Tangente T' : $y = -\dfrac{5}{4}x + \dfrac{3}{2}$.

69 a) $f(-3) = 5$; $f'(0) = \dfrac{-2}{3}$; $f(6) = 5$; $f'(-3) = 0$.

b) $g(-3) = 2$; $g'(0) = \dfrac{1}{3}$; $g(6) = 5$; $g'(-3) = 1$.

c) En $E(5\,;2)$, $f'(5) = \dfrac{3}{2}$. D'où $y = \dfrac{3}{2}(x - 5) + 2 \Leftrightarrow y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{11}{2}$.

En $D(3\,;0)$, la tangente est l'axe des abscisses : $\mathbf{y = 0}$.

6. Fonctions associées

70 1° ⓐ 2° ⓑ

71 a) On ajoute 4 aux ordonnées, et on garde les abscisses.

q	0		3		8
$f(x)$	6	↘	3	↗	9

b) On ajoute 3 aux abscisses et mêmes ordonnées.

x	3		6		11
$f(x)$	2	↘	-1	↗	5

c) On enlève 1 aux abscisses et on enlève 5 aux ordonnées.

x	1		2		5
$f(x)$	-3	↘	-6	↗	0

d) On garde les abscisses, on multiplie les ordonnées par -2 et on ajoute 3.

x	0		3		8
$f(x)$	-1	↗	5	↘	-7

$f(0) = -2 \times u(0) + 3 = -2 \times 2 + 3 = -1$.

72 On réduit au même dénominateur.

f est associée à $x \mapsto \dfrac{2}{x}$, par translation de $\vec{i} + 3\vec{j}$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$	3	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3

73

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_1(x)$	-2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-2

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f_2(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_3(x)$	2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	2

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f_4(x)$	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0

7. Fonction trinôme du second degré

70 $A(x)$: $a = -\dfrac{2}{5}$; $b = 3$; $c = 0$. $B(x)$: $a = \dfrac{1}{4}$; $b = \dfrac{5}{4}$; $c = \dfrac{-3}{4}$.

$C(x)$: du 3ᵉ degré. $D(x)$: $a = -3$; $b = -25$; $c = 400$.

75 On calcule $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ et $\beta = P(\alpha)$.

a) $P(x) = \left(x - \dfrac{5}{2}\right)^2 - \dfrac{21}{4}$. b) $A(x) = -(x - 1)^2 - 2$.

c) $B(x) = -0{,}1\left(x - \dfrac{5}{2}\right)^2 - \dfrac{3}{8}$. d) $C(x) = -0{,}03(x + 2)^2 + \dfrac{3}{25}$.

e) $R(x) = -\dfrac{2}{3}\left(x - \dfrac{3}{16}\right)^2 - \dfrac{125}{128}$. f) $T(x) = \dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{1}{3}\right)^2 + \dfrac{17}{18}$.

76 $\mathscr{C}_1$ et $E(x) = (x - 3)^2 - 1$,

car son sommet est $S(3\,;-1)$.

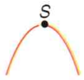
$\mathscr{C}_2$ de sommet $S_2(0\,;3)$ et $A(x) = -x^2 + 3$.

$\mathscr{C}_3$ coupe l'axe des abscisses en 0 et 3 et est tournée vers le bas, donc $B(x) = -x^2 + 3x$.

$\mathscr{C}_4$ coupe l'axe des abscisses en -3 et 0 et est tournée vers le haut, donc $D(x) = x^2 + 3x$.

77 $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-3}{-0{,}4} = 7{,}5$; $f(\alpha) = 10{,}25$

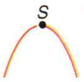
$a = -0{,}2 < 0$



x	$-\infty$		7,5		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	10,25	$\searrow$	

78 $f(x) = \dfrac{-x^2}{4} + 5x$. Donc $\alpha = 10$ et $\beta = 25$

$a = \dfrac{-1}{4} < 0$



x	$-\infty$		10		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	25	$\searrow$	

$g(x) = 3x^2 + 9x - 1$.

x	$-\infty$		$-3/2$		$+\infty$
$g(x)$		$\searrow$	$-31/4$	$\nearrow$	

$h(x) = -0{,}02x^2 - 0{,}4x + 20$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$h(x)$		$\nearrow$	22	$\searrow$	

79 $f(x) = 2x^2 + 5x - 10$. $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-5}{4}$; $a = 2 > 0$

x	$-\infty$		$-5/4$		2		10		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	8	$\nearrow$			240	$\nearrow$	

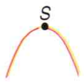
80 1° $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-7}{2}$ et $a = 1 > 0$

q	$-\infty$		$-7/2$		$+\infty$
$C(q)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Donc sur $[0\,;30] \subset \left[-\dfrac{7}{2}\,;+\infty\right[$, la fonction C est croissante

q	0		30
$C(q)$	81	$\nearrow$	1 191

2° a) Chaque hectolitre est vendu 40 €, donc $R(q) = 40q$.
b) $B(q) = R(q) - C(q) = -q^2 + 33q - 81$ avec $q \in [0\,;30]$.
c) $a = -1 < 0$; $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = 16{,}5 \in [0\,;30]$.



q	0		16,5		30
$B(q)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Le maximum est atteint pour 16,5 hectolitres.

8. Fonctions dérivées

81

x	-4	0	3	6
$u(x)$	0	-3	-1	4
$u'(x)$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$
$v(x)$	5	3	1	0
$v'(x)$	0	-1	$-\frac{1}{2}$	0

a) $f' = u' + v'$; $f'(-4) = u'(-4) + v'(-4) = -\dfrac{1}{2} + 0 = -\dfrac{1}{2}$;

$f'(3) = u'(3) + v'(3) = \dfrac{4}{3} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{6}$.

b) $g' = u'v + v'u$. $g'(0) = u'(0) \times v(0) + v'(0) \times u(0) = 0 + (-1) \times (-3) = 3$.

$g'(3) = u'(3) \times v(3) + v'(3) \times u(3) = \dfrac{4}{3} \times 1 + \left(-\dfrac{1}{2}\right)(-1) = \dfrac{11}{6}$.

c) $u(-4) = 0$, donc -4 est valeur interdite pour la fonction $h = \dfrac{1}{u}$, donc aussi pour sa dérivée h'.

$h' = \dfrac{-u'}{u^2}$; $h'(3) = \dfrac{-u'(3)}{(u(3))^2} = \dfrac{-\frac{4}{3}}{(-1)^2} = -\dfrac{4}{3}$.

d) $Q = \dfrac{u}{v}$; Q' : $\dfrac{u'v - v'u}{v^2}$

$Q(3) = -1$; $Q'(3) = \dfrac{\frac{4}{3} \times 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) \times (-1)}{1^2} = \dfrac{5}{6}$.

$Q(0) = -1$; $Q'(0) = \dfrac{0 \times 3 - (-1) \times (-3)}{3^2} = -\dfrac{1}{3}$.

$Q(-4) = 0$; $Q'(-4) = \dfrac{-\frac{1}{2} \times 5 - 0 \times 0}{5^2} = -\dfrac{1}{10}$.

82 a) $3x^2 + 3$; b) $9x^2 + 2x - 12$; c) $\dfrac{3}{x^2} + 12$; d) $\dfrac{-8x}{6} = \dfrac{-4x}{3}$.

83 a) $-x^2 - 6$; b) $\dfrac{4(x+1)^2 - 1}{(x+1)^2}$; c) $\dfrac{-1}{(x+2)^2} + \dfrac{4}{(2-x)^2} = \dfrac{4(x+2)^2 - (2-x)^2}{(x+2)^2(2-x)^2}$;

d) $\dfrac{-2x+1}{2\sqrt{x}} - 2\sqrt{x} = \dfrac{-6x+1}{2\sqrt{x}}$.

84 a) $\dfrac{3x^2 - 27}{(x^2+9)^2}$; b) $\dfrac{-2x^2 + 2x + 1}{(x^2 - x + 1)^2}$; c) $\dfrac{-16x}{(x^2+4)^2}$; d) $\dfrac{8x - 12}{(-x^2 + 3x - 5)^2}$.

9. Recherche de l'expression d'une fonction

85 $A\left(0\,;\dfrac{-3}{2}\right) \in \mathscr{C}_f \Leftrightarrow f(0) = -\dfrac{3}{2}$.

Tangente en A de coefficient $\dfrac{3}{4} \Leftrightarrow f'(0) = \dfrac{3}{4}$.

Tangente horizontale en $-1 \Leftrightarrow f'(-1) = 0$.

$f'(x) = a - \dfrac{c}{(x+2)^2}$ et $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+2}$.

$f(0) = -\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow b + \dfrac{c}{2} = -\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow 2b + c = -3$.

$f'(0) = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow a - \dfrac{c}{4} = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow 4a - c = 3$.

$f'(-1) = 0 \Leftrightarrow a - c = 0$.
On résout le système $a = 1$; $b = -2$ et $c = 1$.

D'où $f(x) = x - 2 + \dfrac{1}{x-2}$.

86 Tangente horizontale en $-2 \Leftrightarrow f'(-2) = 0$. $A(0\,;3) \in \mathscr{C}_f \Leftrightarrow f(0) = 3$.

$f'(x) = \dfrac{-ax^2 - 2bx + a}{(x^2+1)^2}$.

On résout $\begin{cases} \dfrac{-4a + 4b + a}{25} = 0 \\ b = 3 \end{cases}$

D'où $a = 4$ et $b = 3$: $f(x) = \dfrac{4x+3}{x^2+1}$ et $f'(x) = \dfrac{-4x^2 - 6x + 4}{(x^2+1)^2}$.

4. *Traitement de données*

1. Rapport d'une partie au tout

87 Nombre d'élèves en TES :

$12 = \dfrac{50}{100} \times \dfrac{80}{100} \times n \Leftrightarrow n = \dfrac{12}{0{,}5 \times 0{,}8} = 30$.

$\dfrac{12}{30} = 0{,}4$; 40 % des élèves de TES ont un baladeur MP_3.

88 La part des inscrits à l'une au moins des activités dans l'ensemble des adhérents est de 37,5 %, car $\dfrac{0{,}1125}{0{,}30} = 0{,}3$. Or $0{,}375 \times 560 = 210$.

Sur 210 personnes pratiquant yoga ou musculation, 40 % pratiquent que le yoga, donc 60 % pratiquent la musculation (et peut-être aussi le yoga).

Donc $\dfrac{0{,}60 \times 210}{560} = 0{,}225$, soit 22,5 % pratiquent la musculation.

89 Part des hommes mariés parmi les hommes : $\dfrac{17{,}9}{48{,}6} \approx 0{,}3683$; soit 36,83 %.

Part des femmes mariées parmi les femmes : $\dfrac{26{,}8}{51{,}4} \approx 0{,}5214$; soit 52,14 %.

Cela n'a pas de signification d'additionner deux pourcentages ne portant pas sur le même ensemble de référence.

90 Pas de signification : ensembles de référence différents.