1ier JOUR

Page 38 n°133

133 **1. a.** $v_n = \dfrac{(n+1)^2}{2n^2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{2n^2}$.

On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \dfrac{1}{2}$.

b. D'après le calcul de v_n : $v_n > \dfrac{1}{2}$.

c. $v_n < \dfrac{3}{4}$ pour $n^2 - 4n - 2 > 0$ soit $n \geqslant 5$.

d. Pour $n \geqslant N$, $v_n < \dfrac{3}{4}$ soit $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < \dfrac{3}{4}$ donc $u_{n+1} < \dfrac{3}{4} u_n$.

2. a. Initialisation : $u_5 \leqslant u_5 \left(\dfrac{3}{4}\right)^{5-5}$.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que :

$$u_p \leqslant u_5 \left(\frac{3}{4}\right)^{p-5}.$$

Alors en multipliant par $\dfrac{3}{4}$, on obtient $\dfrac{3}{4} u_p \leqslant u_5 \left(\dfrac{3}{4}\right)^{p-4}$.

Or $u_{p+1} < \dfrac{3}{4} u_p$, d'où $u_{p+1} \leqslant u_5 \left(\dfrac{3}{4}\right)^{p-4}$.

b. On additionne les différentes inégalités précédentes.

c. $1 + \dfrac{3}{4} + \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 + \ldots + \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-5} = 4\left(1 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-4}\right) \leqslant 4$.

D'où en multipliant par u_5 : $S_n \leqslant 4u_5$.

3. $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} > 0$ donc (S_n) est croissante. Comme elle est majorée (par $4u_5$), elle converge.

Page 259 Sujet A

1. a. $\overrightarrow{IA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{LC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$ et $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{GC}$, donc $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{LC}$ donc ACLI est un parallélogramme.

b. (LI) et (AC) sont parallèles d'après la question **1. a.** Dans le triangle ABC, J est le milieu de [AB] et K est le milieu de [BC], donc (JK) est parallèle à (AC). Par conséquent (LI) est parallèle à (JK).

c. Les points I, J, K et L sont coplanaires car (JK) et (LI) sont parallèles. (IJ) et (KL) ne sont pas parallèles car (IJ) est parallèle à (EB) et (LK) est parallèle à (BC), or (EB) et (BC) sont sécantes.

d. (IJ) ⊂ (ABF), donc M ∈ (ABF).

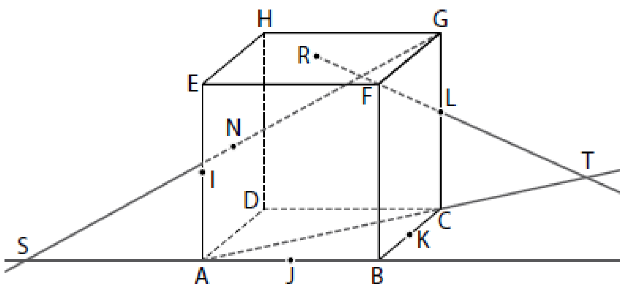
(LK) ⊂ (BCF), donc M ∈ (BCF).

M appartient à l'intersection de (ABF) et (BCF), c'est-à-dire à (BF).

2. (ACH) et (BEG) sont parallèles.

3. N ∈ (ABG), (GN) et (AB) sont sécantes dans le plan (ABG). Or (AB) est incluse dans (ABC), donc le point d'intersection S de (GN) et (AB) est le point d'intersection de (GN) et (ABC).

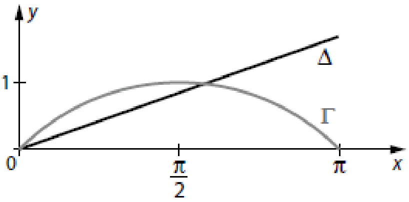
4. (RL) et (AC) sont sécantes dans le plan (ACG) et leur point d'intersection est celui de (RL) et (ABC).



2ième JOUR

Page 98 Sujet D

1. a.



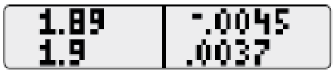
L'équation **(1)** a deux solutions dont l'une est 0 car Γ et Δ se coupent en deux points, dont l'un est l'origine du repère.

b. $f'(x) = \dfrac{1}{2} - \cos x$.

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	↘	$\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	$\frac{\pi}{2}$

c. f est continue et strictement croissante sur $\left[\dfrac{\pi}{2} ; \pi\right]$.

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4} - 1 \approx -0{,}21$ et $f(\pi) \approx 1{,}57$. 0 est compris entre $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ et $f(\pi)$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution x_0 dans $\left[\dfrac{\pi}{2} ; \pi\right]$.



d'où $1{,}89 < x_0 < 1{,}90$.

2. a. $T = \dfrac{2 \sin\theta \cos\theta}{2} = \sin\theta \cos\theta$.

b. $S + T = \dfrac{2\theta \times 1^2}{2} = \theta$ donc $S = \theta - T = \theta - \sin\theta\cos\theta$.

c. $S = T$ équivaut à $\theta - \sin\theta\cos\theta = \sin\theta\cos\theta$ et donc à $\theta - 2\sin\theta\cos\theta = 0$ ou encore à $\theta - \sin(2\theta) = 0$.

En posant $\alpha = 2\theta$, on obtient $\dfrac{\alpha}{2} - \sin\alpha = 0$.

D'après la question **1**, cette équation a pour solution x_0.

$S = T$ pour $\alpha = x_0 \approx 0{,}90$ à 0,01 près par excès.

Page 225 Sujet A

1. $z_1 = 1 + \mathrm{i}$; $z_2 = \mathrm{i}$; $z_3 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$.

$z_4 = -\dfrac{1}{2}$ donc z_4 est bien réel.

2. $u_{n+1} = |z_{n+1}| = \left|\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}\right| |z_n| = \dfrac{1}{\sqrt{2}} u_n$ et $u_0 = 2$, d'où $u_n = 2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$.

3. $\mathrm{OA}_n \leqslant 0{,}1 \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \leqslant 0{,}05 \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{\ln 20}{\ln\sqrt{2}} \Leftrightarrow n \geqslant 9$.

4. $\dfrac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = \dfrac{-1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \mathrm{i}$.

$\dfrac{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}}{\mathrm{OA}_{n+1}} = \left|\dfrac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}}\right| = 1$.

$(\overrightarrow{\mathrm{OA}_{n+1}} ; \overrightarrow{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}}) = \arg\left(\dfrac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

Donc le triangle $\mathrm{OA}_n\mathrm{A}_{n+1}$ est un triangle rectangle isocèle en A_{n+1}.

3ième JOUR

Page 123

❯ $g' = 0{,}25\, g$ car g' est proportionnelle à g avec 0,25 comme facteur de proportionnalité.
Si $g(t) = Ce^{0,25t}$ alors $g'(t) = 0{,}25Ce^{0,25t} = 0{,}25\, g(t)$.

❯ On a $h'(t) = 0$ donc il existe une constante C telle $g(t) = Ce^{0,25t}$.

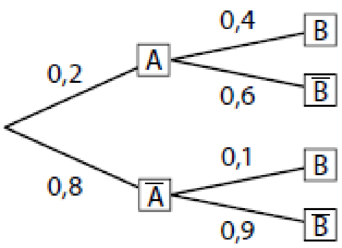
❯ Si $g(0) = 1$, $Ce^0 = 1$ donc $C = 1$. Donc $g(t) = e^{0,25t}$.

❯ On détermine une solution approchée de l'équation $e^{0,25t} = 2$.
La population doublera au bout de 2,77 ans. Elle triplera au bout de 4,4 ans environ.

❯ La population doublera au bout de 5,5 ans environ.
Lorsque t tend vers $+\infty$, la taille de la population tend vers 300 rongeurs.

Page 316 Sujet D

1. a.



b. $P_A(\bar{B}) = 0{,}6$ et $P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0{,}9$.

2. a. $P(A \cap B) = 0{,}2 \times 0{,}4 = 0{,}08$.

b. $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = 0{,}08 + 0{,}08 = 0{,}16$.

c. A et B ne sont pas indépendants :

$$P(A) \times P(B) = 0{,}2 \times 0{,}16 = 0{,}032 \neq P(A \cap B).$$

3. $P_B(A) = \dfrac{0{,}08}{0{,}16} = \dfrac{1}{2}$.

4ième JOUR

Page 159 n°126

1. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} g(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x(1 - \ln x) = -\infty$.

2. g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ comme somme et produit de fonctions dérivables sur $]0 ; +\infty[$:

$$g'(x) = 1 - 1 \times \ln x - x \times \frac{1}{x} = -\ln x.$$

3.

x	0		1		$+\infty$
$-\ln x$	‖	+	0	−	
g	‖ 0	↗	1	↘	$-\infty$

Partie B

1. a. b. On peut conjecturer que la suite (u_n) est décroissante et converge vers 0.

2. a. $v_n = \ln u_n = \ln \dfrac{e^n}{n^n} = \ln e^n - \ln n^n = n - n \ln n = g(n)$.

Soit $1 < n < n + 1$, alors $g(1) > g(n) > g(n + 1)$ comme g est décroissante sur $]1 ; +\infty[$, soit $0 > v_n > v_{n+1}$ donc la suite (v_n) est décroissante.

b. $u_n = e^{v_n}$, comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que (u_n) est décroissante.

3. $u_n = e^{v_n}$ donc $u_n > 0$ soit (u_n) est minorée par 0. Comme (u_n) est décroissante, elle est majorée par son premier terme : $u_1 = e$.

4. (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge.

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} e^{g(n)} = 0.$$

Page 260 Sujet F

1. Affirmation C.
2. Affirmation B.
3. Affirmation C.
4. Affirmation A.

5ième JOUR

Page 101 n°148

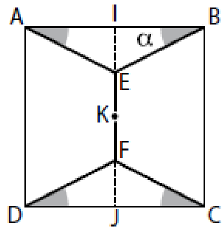
Correctif : Dans la piste de la question B. 3. b., il faut lire « On montrera que, sur $\left]\frac{1}{2} ; \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$, ... » et non pas « On montrera que, sur I, ... ».

1. Soit I le milieu de [AB], EF = 1 − 2EI.

Dans le triangle EIB rectangle en I, $\tan \alpha = \dfrac{EI}{IB} = 2EI$ donc EF = $1 - \tan \alpha$.

$\cos \alpha = \dfrac{IB}{EB}$ donc $EB = \dfrac{1}{2\cos \alpha}$.

$f(\alpha) = EF + 4EB = 1 - \tan \alpha + \dfrac{2}{\cos \alpha} = 1 + \dfrac{2 - \sin \alpha}{\cos \alpha}$.



2. a. $f'(\alpha) = \dfrac{-\cos\alpha(\cos\alpha) - (2 - \sin\alpha)(-\sin\alpha)}{(\cos\alpha)^2}$

donc $f'(\alpha) = \dfrac{-1 + 2\sin\alpha}{(\cos\alpha)^2}$.

b.

α	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$
$f'(\alpha)$		−	0	+	
f	3	↘	$1+\sqrt{3}$	↗	$2\sqrt{2}$

f admet un minimum en $\frac{\pi}{6}$.

c. $150(1 + \sqrt{3}) \approx 409{,}8$. La longueur totale minimale du réseau est d'environ 410 km.

Partie B

1. Soit I, J et K les milieux respectifs de [AB], [CD] et [IJ].

Par construction : BI ≤ BE ≤ BK, donc $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. Pour tout réel x appartenant à I :

$$g(x) = 4BE + 1 - 2EI = 4x + 1 - 2\sqrt{x^2 - \frac{1}{4}}.$$

3. a. $g(x) = 4x + 1 - \sqrt{4x^2 - 1}$. g est dérivable sur $\left]\frac{1}{2} ; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ et

$g'(x) = 4 - \dfrac{4x}{\sqrt{4x^2-1}} = \dfrac{4\sqrt{4x^2-1} - 4x}{\sqrt{4x^2-1}}$.

b. Sur $\left]\frac{1}{2} ; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, $\sqrt{4x^2-1} > 0$ donc $g'(x) \leqslant 0$ équivaut à $4\sqrt{4x^2-1} - 4x \leqslant 0$ et donc à $\sqrt{4x^2-1} \leqslant x$.

Comme $x > 0$, cette inéquation est équivalente à $4x^2 - 1 \leqslant x^2$ et donc à $3x^2 - 1 \leqslant 0$.

$g'(x) \leqslant 0$ a pour ensemble de solutions : $\left]\frac{1}{2} ; \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

c.

x	$\frac{1}{2}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
g	3	↘	$1+\sqrt{3}$	↗	$2\sqrt{2}$

g admet un minimum en $\frac{\sqrt{3}}{3}$: $g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 1 + \sqrt{3}$.

On retrouve le résultat de la partie A.

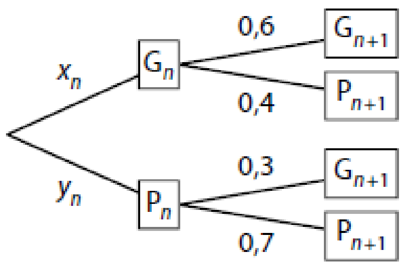
Page 318 n°96

1. a. $P(G_1) = 0{,}5$; $P_{G_1}(G_2) = 0{,}6$ et $P_{P_1}(G_2) = 0{,}3$.

b. $P(G_2) = 0{,}5 \times 0{,}6 + 0{,}5 \times 0{,}3 = 0{,}45$; $P(P_2) = 0{,}55$.

2. a. $P_{G_n}(G_{n+1}) = 0{,}6$ et $P_{G_n}(P_{n+1}) = 0{,}4$.

b. On a l'arbre pondéré :



D'où le système.

3. a.

```
▼ VARIABLES
  ├ x1 EST_DU_TYPE NOMBRE
  ├ y1 EST_DU_TYPE NOMBRE
  ├ N EST_DU_TYPE NOMBRE
  ├ I EST_DU_TYPE NOMBRE
  ├ xn EST_DU_TYPE NOMBRE
  ├ yn EST_DU_TYPE NOMBRE
  ├ xt EST_DU_TYPE NOMBRE
  └ yt EST_DU_TYPE NOMBRE
▼ DEBUT_ALGORITHME
  ├ x1 PREND_LA_VALEUR 0.5
  ├ y1 PREND_LA_VALEUR 1-x1
  ├ LIRE N
  ├ xn PREND_LA_VALEUR x1
  ├ yn PREND_LA_VALEUR y1
  ├ AFFICHER "Rang 1 : "
  ├ AFFICHER x1
  ├ AFFICHER " , "
  ├ AFFICHER y1
  ▼ POUR I ALLANT_DE 2 A N
      ├ DEBUT_POUR
      ├ xt PREND_LA_VALEUR 0.6*xn+0.3*yn
      ├ yt PREND_LA_VALEUR 0.4*xn+0.7*yn
      ├ xn PREND_LA_VALEUR xt
      ├ yn PREND_LA_VALEUR yt
      ├ AFFICHER "Rang "
      ├ AFFICHER I
      ├ AFFICHER " : "
      ├ AFFICHER xn
      ├ AFFICHER " , "
      ├ AFFICHER yn
      └ FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

b. À partir de $n = 5$.

c. Les valeurs se stabilisent, autour de 0,42857 pour x_n et autour de 0,57143 pour y_n.

d. Les observations faites à la question **c.** sont inchangées.

4. a. $x_n + y_n = P(G_n) + P(P_n) = 1$.

b. $w_{n+1} = 4x_{n+1} - 3y_{n+1} = 0{,}12x_n - 0{,}9y_n$
$= 0{,}3(4x_n - 3y_n) = 0{,}3\,w_n$.

(w_n) est une suite géométrique de raison 0,3 et de premier terme $w_1 = 4x_1 - 3y_1 = 0{,}5$.

Ainsi $w_n = 0{,}5 \times 0{,}3^{n-1}$.

5. a. $\begin{cases} x_n + y_n = 1 \\ 4x_n - 3y_n = 0{,}5 \times 0{,}3^{n-1} \end{cases}$ soit $\begin{cases} x_n = \dfrac{3 + 0{,}5 \times 0{,}3^{n-1}}{7} \\ y_n = \dfrac{4 - 0{,}5 \times 0{,}3^{n-1}}{7} \end{cases}$

b. $(0{,}3^{\,n-1})$ converge vers 0, donc (x_n) converge vers $\frac{3}{7}$ et (y_n) converge vers $\frac{4}{7}$.

6ième JOUR

Page 191 Sujet A

Partie A

Voir cours page 172.

Partie B

1. a. $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = +\infty$.

b. f_1 est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

c. $f_1\,(0) = 0$ donc f_1 est positive.

2. a. On vérifie que $F'(x) = f_1(x)$.

b. $I_1 = 2\ln 2 - 1$.

3. a. Sur $[0\,;1]$, $0 \leqslant x^n \leqslant 1$ donc $0 \leqslant \ln(1+x^n) \leqslant \ln 2$.

En intégrant membre à membre entre 0 et 1, on obtient :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \ln 2.$$

b. La suite (I_n) est décroissante.

c. De plus, la suite (I_n) est minorée par 0 donc elle est convergente.

4. a. $g'(x) = \frac{-x}{1+x} \leqslant 0$ donc g est décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

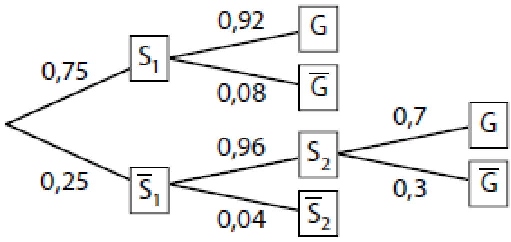
b. $g(0) = 0$ donc g est négative sur $[0\,;+\infty[$.

c. Pour tout x positif, $\ln(1+x) \leqslant x$ d'après la question précédente donc $\ln(1+x^n) \leqslant x^n$ pour tout x positif.

d. $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$ donc la suite (I_n) converge vers 0.

Page 317 n°91

91 **1.**



2. $P(\mathrm{G}) = 0{,}75 \times 0{,}92 + 0{,}25 \times 0{,}96 \times 0{,}7 = 0{,}858$.

3. $P_{\mathrm{G}}(\mathrm{S}_1) = \dfrac{0{,}75 \times 0{,}92}{0{,}858} \approx 0{,}804$.

4. P(« Jeu blanc ») $= 0{,}858^4 \approx 0{,}542$.

7ième JOUR

Page 39 n°136

136 **1. a.** Si (u_n) converge , sa limite L vérifie :

$$L = \frac{1}{3}L + \frac{23}{27}, \text{ soit } L = \frac{23}{18}.$$

b. On démontre l'inégalité par récurrence.

c. $u_{n+1} = u_n = -\frac{2}{3}\left(u_n - \frac{23}{18}\right) < 0$.

Donc (u_n) est une suite décroissante.

La suite (u_n) étant décroissante et minorée, elle converge et sa limite est donc $\frac{23}{18}$ d'après **1. a.**

2. a. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{100} \times \frac{1-\frac{1}{10^n}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{90}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$.

b. $v_n = 1{,}2 + \frac{7}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \ldots + \frac{7}{10^{n+1}}$

$= 1{,}2 + \frac{7}{90}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1{,}2 + \frac{7}{90} = \frac{12}{10} + \frac{7}{90} = \frac{23}{18}$

Page 227 n°189

189 $|z'| = \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{BM}}$ et $\arg(z') = (\overrightarrow{\mathrm{BM}}\,;\overrightarrow{\mathrm{AM}})$.

a. $\mathrm{OM}' = 1 \Leftrightarrow |z'| = 1 \Leftrightarrow \mathrm{AM} = \mathrm{BM}$.

L'ensemble des points M est la médiatrice de [AB].

b. $z' = 0$ ou $\arg(z') = 0$ équivaut à :

$$\mathrm{M} = \mathrm{A} \text{ ou } \begin{cases} (\overrightarrow{\mathrm{BM}}\,;\overrightarrow{\mathrm{AM}}) = 0 \text{ à } \pi \text{ près} \\ \mathrm{M} \neq \mathrm{A} \text{ et } \mathrm{M} \neq \mathrm{B} \end{cases}$$

L'ensemble des points M est la droite (AB) privée du point B.

c. $z' = 0$ ou $\arg(z') = \frac{\pi}{2}$ équivaut à :

$$\mathrm{M} = \mathrm{A} \text{ ou } \begin{cases} (\overrightarrow{\mathrm{BM}}\,;\overrightarrow{\mathrm{AM}}) = \frac{\pi}{2} \text{ à } \pi \text{ près} \\ \mathrm{M} \neq \mathrm{A} \text{ et } \mathrm{M} \neq \mathrm{B} \end{cases}$$

L'ensemble des points M est le cercle de diamètre [AB] privé de B.

8ième JOUR

Page 194 n°155

155 **1.** $u_1 = \ln 2$.

2. a. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n x \cos x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$.

b. $u_{n+2} - u_n = -\frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$.

c. $u_3 - u_1 = -\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = -\frac{3}{8}$ d'où $u_3 = u_1 - \frac{3}{8} = \ln 2 - \frac{3}{8}$.

3. a. $\frac{\sin^{n+1} x}{\cos x} - \frac{\sin^n x}{\cos x} = \frac{\sin^n x}{\cos x}(\sin x - 1) < 0$ donc la suite (u_n) est décroissante.

b. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle est convergente.

4. a. Pour tout x de $\left[0\,;\,\frac{\pi}{3}\right]$, $0 \leqslant \sin x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$; or $\frac{\sqrt{3}}{2} \in\,]0\,;1[$ donc $K = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b. On obtient l'encadrement donné en utilisant les propriétés de l'intégrale, le réel K et le fait que sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{3}\right]$, $\frac{1}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1$.

c. La suite (u_n) converge vers 0.

Page 349 Sujet C

1. T suit la loi uniforme sur $[0\,;10]$.

a. Le temps d'attente moyen de Monsieur Dulac est de 5 minutes.

b. $P(T > 7) = 1 - P(T \leqslant 7) = 1 - \frac{7}{10} = 0{,}3$.

2. a. X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}3$.

b. $P(X = 0) = 0{,}7^{10} \approx 0{,}028$.

c. $P(X \leqslant 5) \approx 0{,}953$.