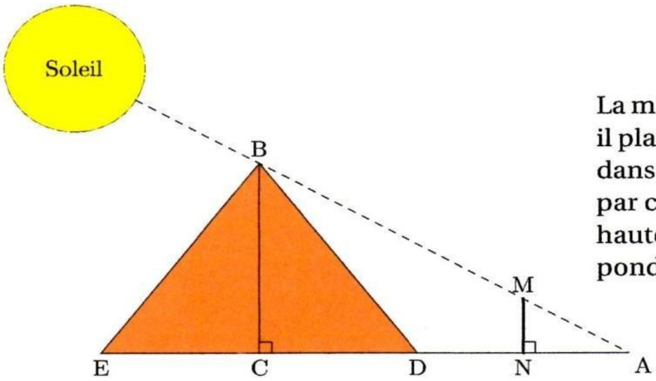
Chapitre 4 # Propriété de Thales appliquée au triangle

I. Rappel historique

Thalès est né vers 625 avant JC dans la cité de Milet (Turquie actuelle). Commerçant, mathématicien, philosophe, il est le premier mathématicien à être rentré dans l'Histoire. Il est connu pour un théorème qui porte son nom (objet de ce chapitre).
Si dans un triangle ABC, M est un point de [AB], N un point de [AC] tels que les droites (MN) et (BC) soient parallèles, alors les longueurs des côtés des trianglmames AMN et ABC sont proportionnelles.

L'historien Grec Diogène Laërce a rapporté que Thalès de Milet, au cours de l'un de ses voyages en Egypte, rencontra la Pharaon Amasis qui voulut le mettre à l'épreuve en lui demandant de déterminer la hauteur de la grande Pyramide de Kheops…Voici comment Thalès aurait procédé, uniquement muni d'un bâton *(nous adapterons ici la situation pour qu'elle soit compréhensible par tous : en particulier, nous utiliserons le mètre comme unité de mesure, mètre dont l'invention ne remonte qu'à 200 ans environ…) :*



La méthode qu'aurait utilisée Thalès est la suivante : il planta un bâton (représenté par le segment [MN]) dans le sol, et mesura la longueur de l'ombre portée par ce bâton. Pour savoir comment il en déduisit la hauteur de la Pyramide de cette simple mesure, réponds aux questions suivantes :

1) Enoncer la propriété permettant de justifier que les droites (MN) et (BC) sont parallèles :
………
……………………………………………………………………………….
2) Quel est le segment qui représente l'ombre au sol du bâton ?...
3) Quel est le segment qui représente l'ombre au sol de la pyramide ?..
4) Thalès a pu mesurer les longueurs suivantes (données ici en mètres) :
MN=2 ; AN=2,8 ; DE=230 ; DA=88.
   a) Combien vaut la longueur AC ? *(on supposera que les points E, C, D et A sont parfaitement alignés et que le triangle EBD est isocèle de sommet principal B)*
   ....
   b) Utilise la proportionnalité des longueurs dans un triangle pour obtenir la longueur BC, c'est-à-dire la hauteur de la Pyramide.

Longueurs des côtés du triangle ABC :	AC=……	BC=……
Longueurs des côtés du triangle AMN	AN=……	MN=……

Chapitre 4 **Propriété de Thales appliquée au triangle**

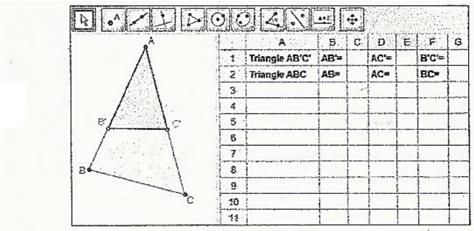
II. Propriété de Thalès dans le triangle

1) Activité en salle informatique

Découvrir la propriété de Thalès dans un triangle

1. Avec le logiciel de géométrie dynamique GeoGebra :

a. Construire un triangle ABC quelconque.
b. Placer un point B' sur le côté [AB] et un point C' sur le côté [AC].
c. Construire le triangle AB'C'.
d. Ouvrir la fenêtre du tableur GeoGebra et reproduire la feuille de calcul suivante.



e. Dans la cellule C1, saisir une formule permettant d'afficher la longueur AB'.
f. Compléter de même les cellules C2, E1, E2, G1 et G2.
g. Dans les cellules C3, E3 et G3, saisir une formule permettant de savoir si le tableau ainsi obtenu est un tableau de proportionnalité.

2. Comment semble-t-on devoir placer les points B' ou C' pour que le tableau soit un tableau de proportionnalité ? On pourra étudier différentes positions des points A, B et C.

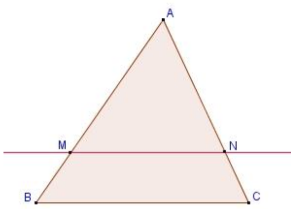
3. a. Pour tester cette conjecture, placer sur les côtés [AB] et [AC] deux points M et N vérifiant les conditions trouvées à la question **2.**.
b. Construire un nouveau tableau avec les longueurs AM, AB, AN, AC, MN et BC comme celui de la question **1.**.
c. Ce tableau semble-t-il être un tableau de proportionnalité pour diverses positions des points M et N ? Que peut-on en conclure ?

2) Propriété de Thales dans le triangle

Dans un triangle ABC où $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$, si les droites (MN) et (BC) sont parallèles, alors : $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$.

Si:

- $M \in [AB]$
- $N \in [AC]$
- $(MN)//(BC)$

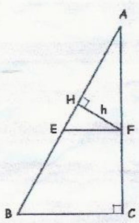


Alors :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Démonstration de la propriété de Thalès :

Soit ABC un triangle .
Soit E un point de [AB] et soit F un point de [AC].
Les droites (EF) et (BC) sont parallèles.
Soit H le point d'intersection de la perpendiculaire à la droite (AB) passant par F.



Calculons les aires des triangles AEF, ABC et du trapèze EFCB.
Nous avons :

$$\mathscr{A}_{AEF} = \frac{EF \times AF}{2} \qquad \mathscr{A}_{ABC} = \frac{BC \times AC}{2}$$

$$\mathscr{A}_{EFCB} = \frac{(EF + BC) \times FC}{2}$$

Mais $\mathscr{A}_{AEF} + \mathscr{A}_{EFCB} = \mathscr{A}_{ABC}$,donc :

$EF \times AF + EF \times FC + BC \times FC = BC \times AC$

$EF \times AF + EF \times FC = BC \times AC - BC \times FC$

$EF \times (AF + FC) = BC \times (AC - FC)$

Or $AF + FC = AC$ et $AC - FC = AF$

Donc $EF \times AC = BC \times AF$

$EF \times AC = BC \times AF$

d'où : $\boxed{\frac{EF}{BC} = \frac{AF}{AC}}$

D'autre part (en appelant h la longueur de FH) :

$\mathscr{A}_{AEF} = \frac{AE \times h}{2}$

Comme l'aire du triangle AEF est également égale à $\frac{EF \times AF}{2}$, nous avons :

$\frac{AE \times h}{2} = \frac{EF \times AF}{2}$ (égalité 1)

De même , l'aire du triangle ABF peu s'écrire de deux manières différentes :

$\mathscr{A}_{AEF} = \frac{AB \times h}{2}$ et $\mathscr{A}_{ACF} = \frac{AF \times AB}{2}$

Et donc : $\frac{AB \times h}{2} = \frac{AF \times BC}{2}$ (égalité 2)

L'égalité 1 permet d'écrire $AE \times h = EF \times AF$ et par suite $\frac{h}{AF} = \frac{EF}{AE}$

L'égalité 2 permet d'écrire $AB \times h = AF \times BC$ et par suite $\frac{h}{AF} = \frac{BC}{AB}$

Nous avons donc :

$\frac{EF}{AE} = \frac{BC}{AB}$ ou encore $\boxed{\frac{EF}{BC} = \frac{AE}{AB}}$

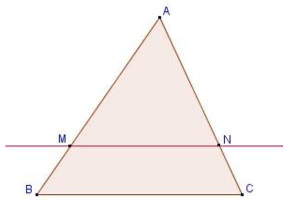
$\frac{EF}{AE} \rightleftarrows \frac{BC}{AB}$

Nous retrouvons les rapports connus : $\frac{EF}{BC} = \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$

Soit, en ordonnant, pour retrouver l'écriture habituelle :

3) Application :

On considère le triangle AMN ci-contre.
Les points A, B et M sont alignés dans cet ordre, ainsi que les points A, C et N. Les droites (MN) et (BC) sont parallèles. On a: AB= 4 cm; BM= 1 cm; BC= 6 cm; AN= 9cm. Calculer MN.



On sait que: $B \in [AM]$ donc $AM = AB + BM = 4 + 1 = 5$ cm et que $C \in [AN]$ et $(MN) // (BC)$

Or, d'après la propriété de Thalès, on a :

$$\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{AC}{9} = \frac{6}{MN}$$

Donc, $\frac{4}{5} = \frac{6}{MN}$ soit $4 \times MN = 6 \times 5$ puis $4 \times MN = 30$ et enfin, $MN = \frac{30}{4} = 7{,}5\,\text{cm}$.

La longueur MN est égale à 7,5 cm.

III. Agrandissement et réduction d'un triangle

1) Activité

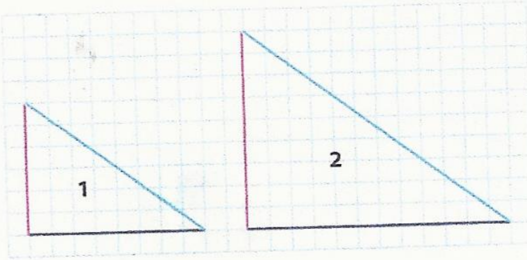
1. Recopier et compléter le tableau suivant à l'aide de la figure ci-dessous :

Longueurs en centimètres	Côté rouge	Côté vert	Côté bleu
Triangle 1			
Triangle 2			

2. Prouver qu'il s'agit d'un tableau de proportionnalité.

3. Calculer le coefficient de proportionnalité qui permet de passer des longueurs du triangle **1** à celles du triangle **2**. S'agit-il d'un coefficient d'agrandissement ou de réduction ? Expliquer.

4. Mesurer et comparer les angles des deux triangles. Que remarque-t-on ?



Chapitre 4 Propriété de Thales appliquée au triangle

Propriété :

Si une figure est un agrandissement ou une réduction d'une autre figure, alors leurs longueurs sont proportionnelles.

Le coefficient de proportionnalité entre ces longueurs est appelé coefficient d'agrandissement ou coefficient de réduction de la figure.

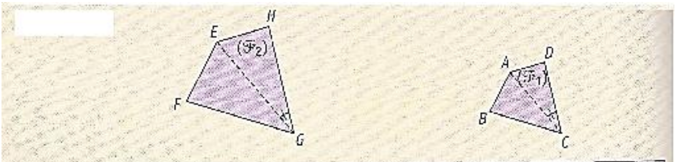
Propriété :

- Si le coefficient de proportionnalité entre les longueurs des deux figures est plus grand que 1, alors c'est un coefficient d'agrandissement.
- Si le coefficient de proportionnalité entre les longueurs des deux figures est plus petit que 1, alors c'est un coefficient de réduction.

Propriété :

Si une figure est un agrandissement ou une réduction d'une autre figure, alors elles ont toutes les deux les mêmes mesures d'angle.

Exemple :



	Agrandissement	Réduction
Figure	La figure $(\mathcal{F}_2)$ est un **agrandissement** de rapport $\frac{3}{2}$ de la figure $(\mathcal{F}_1)$.	La figure $(\mathcal{F}_1)$ est une **réduction** de rapport $\frac{2}{3}$ de la figure $(\mathcal{F}_2)$.
Longueurs	Par exemple, on a : $EF = \frac{3}{2} \times AB$; $EG = \frac{3}{2} \times AC$; $GH = \frac{3}{2} \times CD$ ...	Par exemple, on a : $AB = \frac{2}{3} \times EF$; $AC = \frac{2}{3} \times EG$; $CD = \frac{2}{3} \times GH$ ...
Angles	Par exemple, on a : $\widehat{EFG} = \widehat{ABC}$; $\widehat{EGH} = \widehat{ACD}$; $\widehat{FEH} = \widehat{BAD}$ ...	