Combinatoire, dénombrement...

■ Exercice 1 (CG 2007)

On considère dans cet exercice tous les tableaux carrés à 9 cases dans lesquelles sont placés dans un certain ordre tous les entiers de 1 à 9. Par exemple :

1	8	7
9	2	4
6	5	3

À un tel tableau on associe les produits des éléments de ses lignes (56, 72, 90 dans l'exemple ci-dessus) et les produits des éléments de ses colonnes (54, 80, 84 dans l'exemple ci-dessus).

0.(question ajoutée) De combien de façons différentes peut-on remplir le tableau ?

1. (a) Étant donné un tel tableau, montrer qu'il a au moins une ligne dont le produit des éléments est supérieur ou égal à 72.

   (b) Donner un tableau de ce type dont les trois lignes ont un produit de leurs éléments inférieur ou égal à 72.

2. Étant donné un tableau de ce type, montrer qu'il a au moins une ligne ou une colonne dont le produit des éléments est supérieur ou égal à 90.

■ Exercice 2

Soient n un entier naturel impair, $(x_1;\cdots;x_n)$ une liste de n réels distincts et $(y_1;\cdots;y_n)$ une permutation de cette liste.
On suppose que : $|x_1 - y_1| = \cdots = |x_n - y_n|$.

1) Montrer que pour tout entier $k \in [1;n]$, $x_k = y_k$.
2) Le résultat subsiste-t-il si n est pair ?

■ Exercice 3

Soit un carré de côté 1. Montrer que si 9 points sont intérieurs au carré, il existe un triangle formé avec trois des points précédents dont l'aire est inférieure à $\frac{1}{8}$.

■ Exercice 4

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \cdots, x_n$ des entiers relatifs. Montrer qu'il existe une partie non vide I de $\{1;\cdots;n\}$ tel que $\sum\limits_{i\in I} x_i$ soit divisible par n.

■ Exercice 5

Soient 11 entiers relatifs $x_1, x_2, \cdots, x_{11}$. Montrer qu'il existe une combinaison linéaire $\sum\limits_{k=1}^{11} a_k x_k$ avec les a_k non tous nuls dans $\{-1;0;1\}$, qui est divisible par 2019.

■ Exercice 6

On admet qu'il n'existe aucune injection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$.

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux réels distincts x et y tels que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

■ Exercice 7

On tire simultanément 8 cartes d'un jeu de 32 cartes.

1. Combien y a-t-il de tirages différents ?
2. Déterminer le nombre de tirages comportant :
   (a) Un roi exactement.
   (b) Au moins un roi.
   (c) Exactement 3 coeurs et 2 dames.
   (d) Au moins un coeur et au moins un valet.

■ Exercice 8

Une salle de classe contient 36 places (18 tables à deux places). Une classe de 25 élèves (10 filles et 15 garçons) s'y installe.

1. De combien de façons différentes les élèves peuvent-ils se placer ?
2. De combien de façons différentes les élèves peuvent-ils se placer, si on impose à chaque fille d'être à côté (i.e. à la même table) d'une autre fille ?
3. Même question si on impose à chaque fille d'être à côté d'un garçon.

■ Exercice 9

Dans cet exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

Si un escalier compte n marches ; on note K_n le nombre de façons de descendre cet escalier, sachant qu'on descend une ou deux marches à la fois.

1. Calculer K_5 et K_6.
2. Prouver que $K_{n+2} = K_{n+1} + K_n$. Que peut-on en conclure ?
3. Établir que $K_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k}$ ($\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x).
4. Quelle propriété du triangle de Pascal peut-on déduire des questions 2) et 3) ?

■ Exercice 10

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant des arguments de nature combinatoire, démontrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

■ Exercice 11

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. En utilisant des arguments de nature combinatoire, démontrer que :

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n+k}{n} = \binom{n+p+1}{n+1}.$$

■ Exercice 12

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathrm{Card}\left\{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{N}^p,\ x_1 + \cdots + x_p = n\right\} = \binom{n+p-1}{p-1}$.