Arithmétique, partie 1

Divisibilité, division euclidienne, congruences...

■ Exercice 1

a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$; montrer que $\binom{2k}{k}$ est un entier pair.

b) Soient n un entier pair et p un entier impair tels que $0 \leqslant p < n$; montrer que $\binom{n}{p}$ est un entier pair.

■ Exercice 2

Déterminer le reste de la division euclidienne de $2^{2018} - 1$ par $2^{58} - 1$.

■ Exercice 3

Soit r (resp. q) le reste (resp. le quotient) de la division euclidienne de 2019^{2018} par 17. Calculer r et déterminer le chiffre des unités de l'écriture décimale de q.

■ Exercice 4

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que tout entier dans $[\![1, n!]\!]$ s'écrit comme la somme d'au plus $n - 1$ diviseurs de $n!$.

■ Exercice 5 (CG 1992)

Si x est un réel, la partie entière de x, notée $\lfloor x \rfloor$, est égale au plus grand nombre entier inférieur ou égal à x.

Déterminer le chiffre des unités de $\left\lfloor \dfrac{10^{1992}}{10^{83} + 7} \right\rfloor$.

■ Exercice 6

Montrer qu'il existe une infinité d'entiers naturels n tels que n divise $2^n + 1$.

■ Exercice 7

Déterminer tous les entiers $n \geqslant 1$ qui possèdent les propriétés suivantes :

- l'écriture décimale de n se termine (à droite) par 6,
- lorsqu'on efface ce 6 et qu'on le place à gauche de l'écriture décimale sans modifier les autres chiffres, on obtient le quadruple de n.

■ Exercice 8

Soit $n \in \mathbb{N}$; montrer que $n^2 \mid (n + 1)^n - 1$.

■ Exercice 9

Soient sept entiers relatifs $a_1, a_2, \cdots, a_7$ tels que $9 \mid \sum\limits_{k=1}^{7} a_k^3$. Montrer qu'au moins un des a_k est divisible par 3.