Arithmétique, partie 3

Descente infinie...

La descente infinie est un procédé démonstratif dont le nom, sinon l'emploi, est dû à Pierre de Fermat. Il consiste à montrer qu'on peut déduire systématiquement d'une solution en nombres entiers à un problème donné une autre solution composée de nombres plus petits, et réitérer le procédé jusqu'à épuiser les solutions possibles, ou aboutir à une contradiction, car il n'existe pas de suite indéfiniment décroissante d'entiers naturels.
Cette méthode repose sur l'une des propriétés de l'ensemble $\mathbb{N}$: « toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément ».

■ **Exercice 1** (Bac S, Métropole, juin 2003)

Trouver tous les entiers x, y et z tels que $x^2 + y^2 = 7z^2$.

■ **Exercice 2**

a) Trouver tous les entiers x, y et z tels que $x^3 + 2y^3 = 4z^3$.

b) Trouver tous les entiers x, y et z tels que $x^3 + 9y^3 = 3z^3$.

■ **Exercice 3**

Soient x et y des entiers strictement positifs tels que xy divise $x^2 + y^2 + 1$.
Montrer que $\dfrac{x^2 + y^2 + 1}{xy} = 3$.

■ **Exercice 4**

Trouver tous les entiers relatifs a et b tels que $a^4 + (a + b)^4 + b^4$ soit un carré parfait.

■ **Exercice 5**

Trouver tous les entiers naturels a, b, c et d tels que $a^2 + 5b^2 = 2b^2 + 2cd + 3d^2$.

■ **Exercice 6** (OIM Australie 1988)

Soient a et b deux entiers strictement positifs tels que $ab + 1$ divise $a^2 + b^2$.
Montrer que $\dfrac{a^2 + b^2}{1 + ab}$ est un carré parfait.

■ **Exercice 7** (Équation de Markov)

Pour quels entiers naturels n, existe-t-il des entiers strictement positifs a, b et c tels que $a^2 + b^2 + c^2 = nabc$?

■ **Exercice 8**

Déterminer tous les couples (m, n) d'entiers strictement positifs tels que n divise $m^2 + 1$ et m divise $n^2 + 1$.

■ **Exercice 9** (Grand Théorème de Fermat, cas $n = 4$)

a) Trouver tous les triangles rectangles à côtés entiers dont l'aire est un carré parfait.

b) Trouver tous les entiers positifs x, y et z tels que $x^4 - y^4 = z^2$.