BTS Groupement A

Formulaire de mathématiques autorisé.

Exercice 1 *BTS, Groupement A1, 2010* **3 points**

On considère un système physique dont l'état est modélisé par la fonction y de la variable t, solution de l'équation différentielle :

$$y''(t) + 4y(t) = 20 \qquad (1)\,.$$

1. Déterminer la fonction constante h solution particulière de l'équation différentielle (1).
2. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (1).
3. En déduire l'expression de la fonction f solution de l'équation différentielle (1) qui vérifie les conditions $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

Exercice 2 *BTS, Groupement A1, 2007* **8 points**

On désigne par i le nombre complexe de module 1 dont un argument est $\dfrac{\pi}{2}$.

On considère un filtre dont la fonction de transfert T est définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$T(\omega) = \frac{\mathrm{i}\omega k}{1 - \mathrm{i}\dfrac{\omega}{2}}.$$

Le nombre k est un nombre réel strictement positif compris entre 0 et 1.

En associant trois filtres identiques au précédent, on obtient un système dont la fonction de transfert H est définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$H(\omega) = (T(\omega))^3\,.$$

1. On note $r(\omega)$ le module de $H(\omega)$. On a donc : $r(\omega) = |H(\omega)|$.
   (a) Montrer que le module de $T(\omega)$ est $\dfrac{k\omega}{\sqrt{1 + \dfrac{\omega^2}{4}}}$.
   (b) En déduire $r(\omega)$.
2. (a) Justifier qu'un argument de $(i\omega k)^3$ est $\dfrac{3\pi}{2}$.
   Justifier qu'un argument de $1 - \mathrm{i}\dfrac{\omega}{2}$ est $-\arctan\left(\dfrac{\omega}{2}\right)$.
   En déduire qu'un argument de $H(\omega)$, notée $\varphi(\omega)$, est défini sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :
   $$\varphi(\omega) = \frac{3\pi}{2} + 3\arctan\left(\frac{\omega}{2}\right).$$
   (b) On note φ' la dérivée de la fonction φ. Calculer $\varphi'(\omega)$ et déterminer le signe de φ'.
   (c) Déterminer les limites de la fonction φ en 0 et $+\infty$.
3. Dans le tableau ci-après on donne les variations de la fonction r sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   Recopier et compléter ce tableau en utilisant les résultats obtenus dans la question 2.

ω	0		$+\infty$
$r'(\omega)$	$\Vert$	$+$	
$r(\omega)$	$\Vert$ 0	$\nearrow$	$8k^3$
$\varphi(\omega)$	$\Vert$		
$\varphi'(\omega)$	$\Vert$		

4. **Dans cette dernière question, on se place dans le cas où $\mathbf{k = 0,9}$.**
   Lorsque ω décrit l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, le point d'affixe $H(\omega)$ décrit une courbe $\mathcal{C}$.
   En **annexe 1, à rendre avec la copie,** la courbe $\mathcal{C}$ est tracée dans le plan complexe.
   On note ω_0 la valeur de ω pour laquelle le module de $H(\omega)$ est égal à 1.
   (a) Placer précisément le point M_0 d'affixe $H(\omega_0)$ sur le document réponse donné en **annexe 1.**
   (b) Calculer une valeur arrondie à 10^{-2} près du nombre ω_0, puis de $\varphi(\omega_0)$.

Exercice 3 *BTS, Groupement A1, 2010* **9 points**

Spécialités CIRA, Électrotechnique, Génie optique, Systèmes électroniques, TPIL

Dans cet exercice, on se propose d'étudier dans la partie A une perturbation d'un signal continu et, dans la partie B, la correction de cette perturbation par un filtre analogique.

Dans cet exercice, on note τ une constante réelle appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$ et on considère les fonctions f et g définies sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, telles que :
- pour tout nombre réel t, $f(t) = 1$;
- la fonction g est périodique de période 2π et :

$$\begin{cases} g(t) &= 0 \quad \text{si } 0 \leqslant t < \tau \\ g(t) &= 1 \quad \text{si } \tau \leqslant t < 2\pi \end{cases}$$

Pour tout nombre réel t, on pose :

$$h(t) = f(t) - g(t)$$

La fonction h ainsi définie représente la perturbation du signal.

1. Les courbes représentatives des fonctions f et g sont tracées sur le **document réponse n$^{\text{o}}$ 2**. (figures 1 et 2).
   Sur la figure 3 du **document réponse n$^{\text{o}}$ 2**, tracer la représentation graphique de la fonction h.
2. On admet que la fonction h est périodique de période 2π.
   Pour tout nombre réel t, on définit la série de Fourier $S(t)$ associée à la fonction h par

$$S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\right)$$

   (a) Déterminer a_0.
   (b) Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 1.
   Calculer

$$\int_0^{\tau} \cos(nt)\,\mathrm{d}t$$

   et en déduire que

$$a_n = \frac{1}{n\pi}\sin(n\tau).$$

   (c) Montrer que pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 1,

$$b_n = \frac{1}{n\pi}(1 - \cos(n\tau)).$$

3. Soit n un nombre entier naturel. On associe à n le nombre réel A_n tel que :

- $A_0 = a_0$
- $A_n = \sqrt{\dfrac{a_n^2 + b_n^2}{2}}$ si n est un nombre entier supérieur ou égal à 1.

Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a :
$A_n = \dfrac{1}{n\pi}\sqrt{1 - \cos(n\tau)}$.

On suppose, pour toute la suite de l'exercice, que $\tau = \dfrac{\pi}{4}$.

4. Compléter le **tableau** du **document réponse n° 3** avec des valeurs approchées à 10^{-5} près.
5. La valeur efficace h_{eff} de la fonction h est telle que :

$$h_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [h(t)]^2\, dt.$$

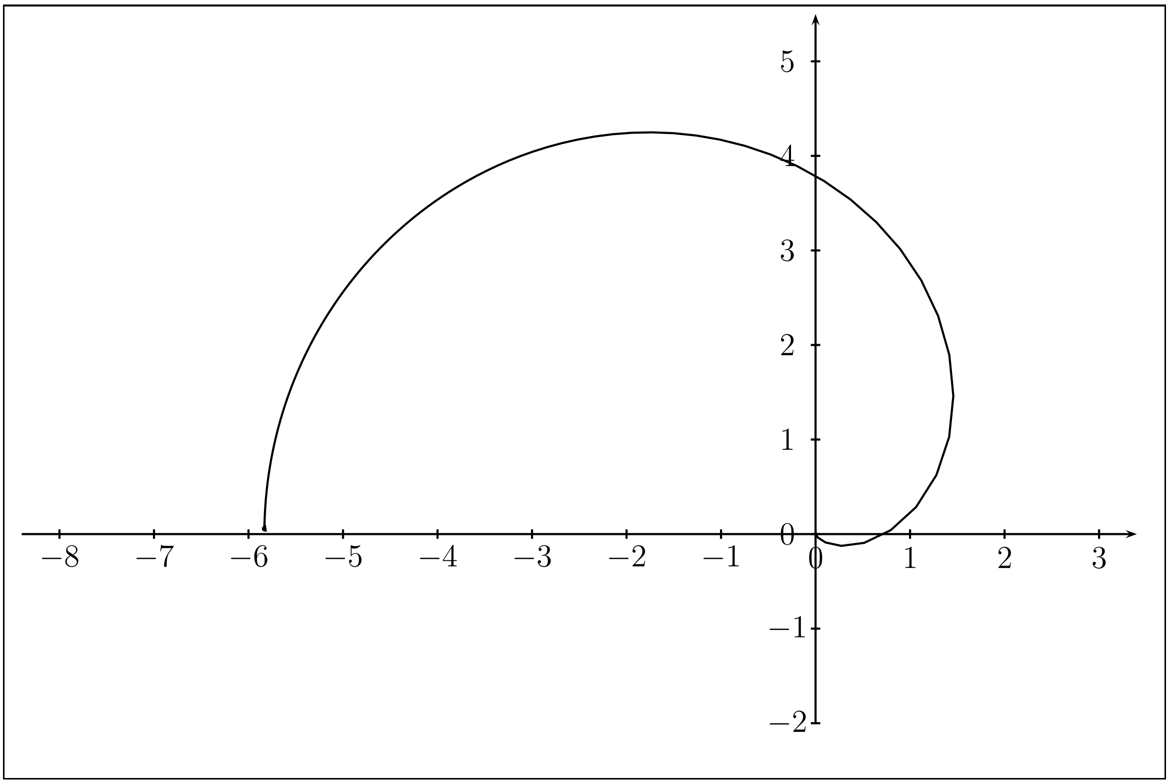
   (a) Calculer h_{eff}^2.

   (b) Montrer que, pour tout $\tau \in [0\,;\,2\pi]$, $0 \leqslant 1 - \cos(n\tau) \leqslant 2$, et en déduire que la série $P = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} A_n^2$ converge.

   (c) Calculer une valeur approchée à 10^{-4} près du nombre réel P_3 défini par $P_3 = \displaystyle\sum_{n=0}^{3} A_n^2$.

   (d) Calculer une valeur approchée à 10^{-2} près du quotient $\dfrac{P_3}{h_{\text{eff}}^2}$.

Annexe 1
Document réponse à rendre avec la copie



Document réponse n° 2, à rendre avec la copie (exercice 1)

Figure 1 : courbe représentative de f

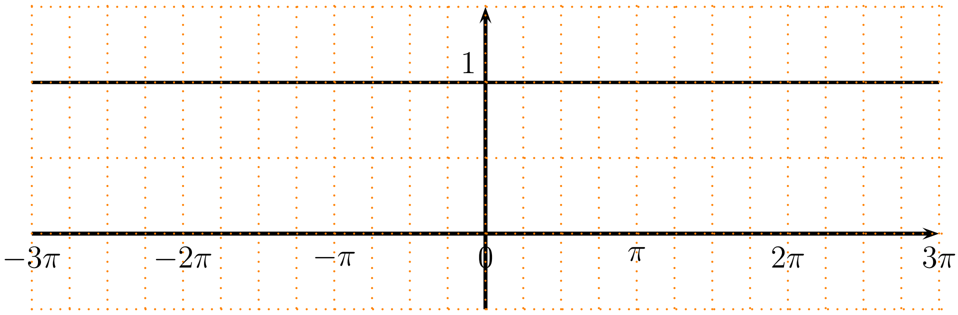


Figure 2 : courbe représentative de g

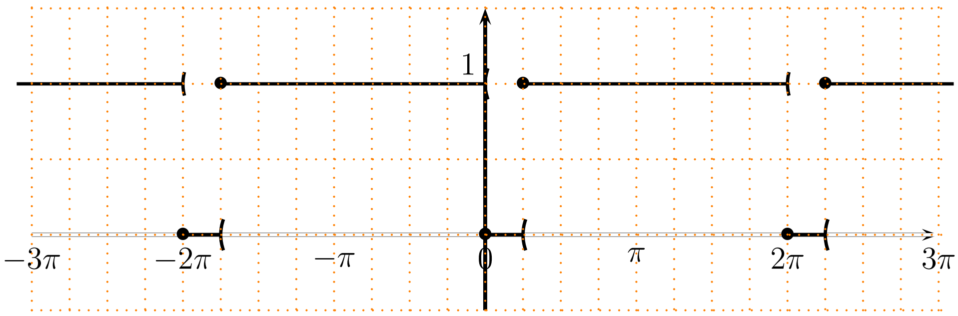
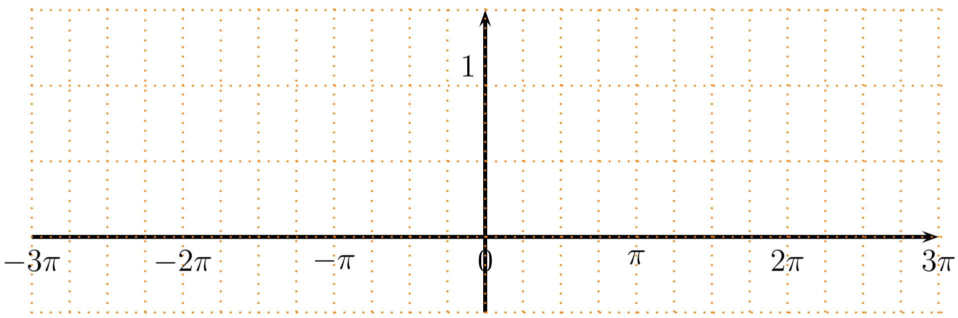


Figure 3 : courbe représentative de h



Document réponse n° 3, à rendre avec la copie (exercice 1)

n	0	1	2	3	4	5	6	7
A_n	0,125 00	0,172 27		0,138 63		0,083 18	0,053 05	0,024 61

n	8	9	10	11	12	13	14	15
A_n		0,019 14	0,031 83	0,037 81		0,031 99	0,022 74	0,011 48