BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR
GROUPEMENT A

MATHÉMATIQUES

Session 2015

Durée : 3 heures

SPECIALITE	Coefficient
Contrôle industriel et régulation automatique	**2**
Informatique et réseaux pour l'industrie et les services techniques	**3**
Systèmes électroniques	**2**
Techniques physiques pour l'industrie et le laboratoire	**3**
Électrotechnique	**2**
Génie Optique	**3**

Matériel autorisé :

Toutes les calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique sont autorisées à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante.

Circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999

Documents à rendre et à agrafer avec la copie :

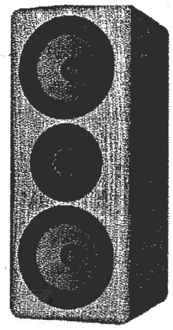
Document réponse 1..page 8

Document réponse 2..page 9

Dès que le sujet vous est remis assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 9 pages numérotées de 1 à 9.

EXERCICE 1 (11 points)

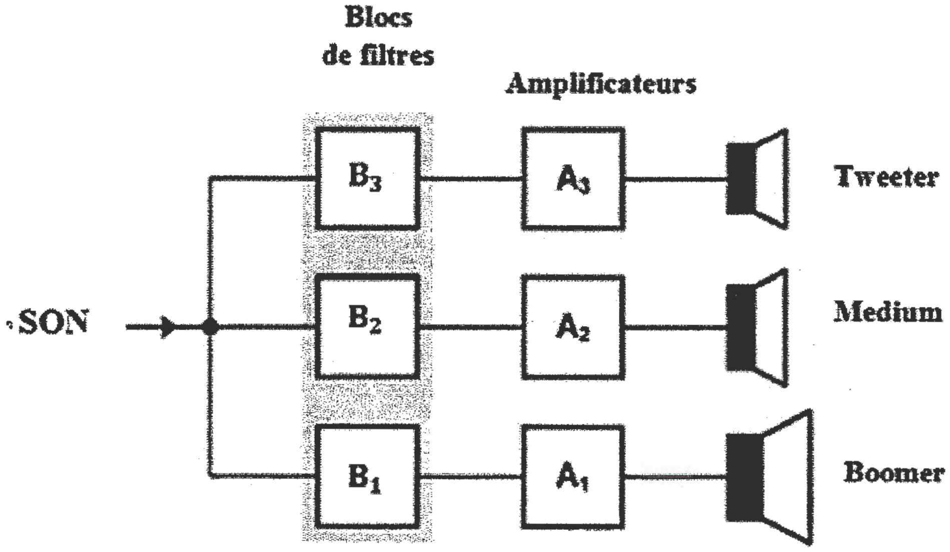
Une enceinte acoustique transforme une puissance électrique en pression acoustique. Elle comporte plusieurs haut-parleurs pour restituer les plages de fréquences audibles car il n'existe pas de haut-parleur qui puisse restituer la totalité de ces fréquences.



Une enceinte acoustique de qualité comporte 3 haut-parleurs :

- Le tweeter qui reproduit les fréquences hautes (3 à 15 kHz) des sons aigus.
- Le médium qui reproduit les fréquences intermédiaires (300 à 3000 Hz).
- Le boomer qui reproduit les fréquences basses (30 à 300 Hz) des sons graves.

Chaque haut-parleur est précédé d'un bloc de filtres qui sélectionne les fréquences adaptées et d'un amplificateur.



Dans l'exercice, on étudie un des blocs de filtres utilisés. Il est constitué de deux filtres F_1 et F_2.

Pour le filtre F_1, on note :

- H_1 sa fonction de transfert, .
- $G_1(\omega) = 20\log|H_1(j\omega)|$, où j est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$, le **gain en décibel** du filtre pour une pulsation ω ($\omega \geq 0$).
- ω_1 la **pulsation de coupure à -3 dB** du filtre c'est-à-dire la pulsation ω_1 pour laquelle le gain en décibel est égal à -3 (on admet qu'il n'y en a qu'une),
- f_1 la fréquence associée à ω_1. On l'appelle **fréquence de coupure du filtre** et $f_1 = \dfrac{\omega_1}{2\pi}$

La bande passante du filtre F_1 est l'ensemble des fréquences que le filtre laisse passer. On considère que ce sont les fréquences associées à un gain en décibel supérieur ou égal à -3.

On adopte les notations et le vocabulaire analogues pour le filtre F_2.

PARTIE A : cas du filtre F_1

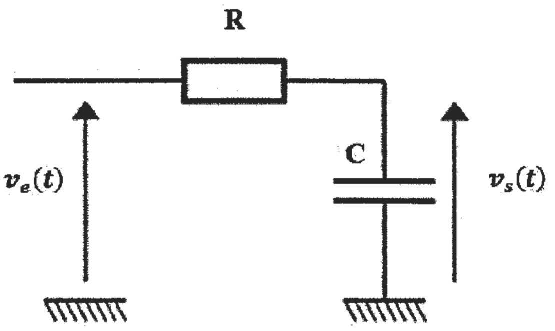
On donne dans **le document réponse (page 9)** la représentation graphique de la fonction G_1.

1) Déterminer graphiquement une valeur approchée de la pulsation de coupure ω_1 du filtre F_1. Laisser apparents les traits de construction.

2) En déduire
a) une estimation au hertz près de la fréquence de coupure f_1 du filtre F_1,
b) une estimation de la bande passante du filtre F_1.

PARTIE B : cas du filtre F_2

Le filtre F_2 est représenté sur le schéma ci-contre.



Les tensions d'entrée v_e et de sortie v_s sont des fonctions causales vérifiant : $v_e(0)=0$, $v_s(0)=0$ et $v_s(t)+\mathrm{RC}\,v_s'(t)=v_e(t)$ (1)

On note V_e et V_s les transformées de Laplace de v_e et v_s.

Différentes formules de transformées de Laplace sont données à la fin de l'énoncé de cet exercice (page 5).

1) La fonction de transfert H_2 du filtre F_2 vérifie, pour tout réel p strictement positif :

$$H_2(p)=\frac{V_s(p)}{V_e(p)}.$$

En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'égalité (1), démontrer que

$$H_2(p)=\frac{1}{1+\mathrm{RC}p}$$

2) On souhaite connaître la tension de sortie v_s qui est obtenue lorsque la tension d'entrée v_e est un échelon d'amplitude 5V, autrement dit lorsque pour tout réel t :

$$v_e(t)=5\,\mathcal{U}(t) \text{ avec } \mathcal{U}(t)=\begin{cases}0 & \text{si } t<0\\ 1 & \text{si } t\geq 0\end{cases}$$

a) Donner $V_e(p)$ puis calculer $V_s(p)$ en fonction de R, C et p.

b) Démontrer que : $V_s(p) = \dfrac{5}{p} - \dfrac{5}{p + \dfrac{1}{\mathrm{RC}}}$.

c) En déduire $v_s(t)$ pour tout réel positif ou nul t.

3) On rappelle que pour tout réel positif ω : $G_2(\omega) = 20\log(|H_2(\mathrm{j}\omega)|)$

et que pour tout réel strictement positif x : $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

a) Calculer le module $|H_2(\mathrm{j}\omega)|$ du nombre complexe $H_2(\mathrm{j}\omega)$.

b) En déduire que : $G_2(\omega) = -\dfrac{10}{\ln(10)} \times \ln(1 + (\mathrm{RC})^2\omega^2)$.

4) Etude de la fonction G_2

a) Montrer que pour tout réel positif ω : $G_2'(\omega) = \dfrac{1}{\ln(10)} \times \dfrac{-20(\mathrm{RC})^2\omega}{1 + (\mathrm{RC})^2\omega^2}$

b) En déduire les variations de la fonction G_2 sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

c) Déterminer $\lim\limits_{\omega \to +\infty} G_2(\omega)$.

d) Dresser le tableau de variations complet de la fonction G_2 sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

5) Détermination de la bande passante du filtre F_2

a) Calculer $G_2(\dfrac{1}{\mathrm{RC}})$.

Justifier que la pulsation de coupure à -3 dB du filtre F_2, notée ω_2, est égale à $\dfrac{1}{\mathrm{RC}}$ avec une bonne approximation.

b) Pour la suite de l'exercice on prend : $\mathrm{R} = 160 \times 10^3\,\Omega$ **et** $\mathrm{C} = 3{,}4 \times 10^{-9}\,\mathrm{F}$.
Donner une valeur approchée arrondie à l'unité de la fréquence de coupure f_2.

c) Quelle est la bande passante du filtre F_2 ? Justifier.

Partie C : bilan

Le bloc de filtres étudié dans l'exercice est constitué des filtres F_1 et F_2.
La bande passante de ce bloc de filtres est l'ensemble des fréquences que le filtre F_1 et le filtre F_2 laissent tous les deux passer.

1) Quelle est la bande passante du bloc de filtres étudié ?

2) Auquel des trois haut-parleurs de l'enceinte acoustique est associé le bloc de filtres étudié ?

Formules relatives à la transformation de Laplace.

Fonction	Transformée de Laplace
$t \mapsto \mathcal{U}(t)$	$p \mapsto \dfrac{1}{p}$
$t \mapsto t\,\mathcal{U}(t)$	$p \mapsto \dfrac{1}{p^2}$
$t \mapsto t^n\,\mathcal{U}(t)$, avec $n \geq 1$	$p \mapsto \dfrac{n!}{p^{n+1}}$
$t \mapsto \mathrm{e}^{at}\,\mathcal{U}(t)$, avec a constante réelle	$p \mapsto \dfrac{1}{p-a}$
Propriétés	
Fonction	**Transformée de Laplace**
$t \mapsto f(t)\mathcal{U}(t)$	$p \mapsto F(p)$
$t \mapsto f(t-a)\mathcal{U}(t-a)$, avec a constante réelle	$p \mapsto F(p)\mathrm{e}^{-ap}$
$t \mapsto f(at)\mathcal{U}(t)$, avec a constante réelle non nulle	$p \mapsto \dfrac{1}{a}F(\dfrac{p}{a})$
$t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-at}\mathcal{U}(t)$, avec a constante réelle	$p \mapsto F(p+a)$
$t \mapsto f'(t)\mathcal{U}(t)$	$p \mapsto pF(p) - f(0^+)$

EXERCICE 2 (9 points)

On considère un signal modélisé par une fonction s, paire et périodique de période $\mathrm{T} = 2$, vérifiant :

$$(s(t) = 2t \text{ si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}) \text{ et } (s(t) = 1 \text{ si } \frac{1}{2} < t \leq 1)$$

Partie A : série de Fourier associée à la fonction s

On admet que la fonction s est développable en série de Fourier et que, pour tout réel t :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)), \text{ avec } \omega = \frac{2\pi}{\mathrm{T}}$$

On rappelle que $a_0 = \frac{1}{\mathrm{T}} \int_{-\frac{\mathrm{T}}{2}}^{\frac{\mathrm{T}}{2}} s(t)dt$ et que, pour tout entier non nul n, $a_n = \frac{2}{\mathrm{T}} \int_{-\frac{\mathrm{T}}{2}}^{\frac{\mathrm{T}}{2}} s(t)\cos(n\omega t)dt$ et $b_n = \frac{2}{\mathrm{T}} \int_{-\frac{\mathrm{T}}{2}}^{\frac{\mathrm{T}}{2}} s(t)\sin(n\omega t)dt$.

1) Compléter, sur la figure du **document réponse 2 (page 9)**, la représentation graphique de la fonction s sur l'intervalle $[-4;4]$.

2) Établir que : $a_0 = \frac{3}{4}$.

3) Préciser la valeur de b_n pour tout entier naturel n non nul. Justifier.

4) On veut calculer a_n.
À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu certains résultats (voir copie d'écran donnée dans **le document réponse 2)**.

Démontrer alors que pour tout entier non nul n : $a_n = \dfrac{4(\cos(\frac{n\pi}{2}) - 1)}{n^2\pi^2}$.

5) Recopier et compléter le tableau ci-dessous. On y portera les valeurs approchées à 10^{-3} près de a_n pour n compris entre 1 et 7.

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
a_n	$-0{,}405$						

Partie B : puissance du signal

1) La fonction s étant paire, la puissance du signal sur une période T est donnée par :

$$P = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} (s(t))^2\,dt$$

Montrer que $P = \frac{2}{3}$.

2) On rappelle la formule de Parseval : $P = a_0{}^2 + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}(a_n{}^2 + b_n{}^2)$.

On considère l'algorithme :

<u>**Variables**</u>	n entier naturel S nombre réel a nombre réel

<u>**Traitement**</u>	n prend la valeur 0.
	S prend la valeur $(\frac{3}{4})^2$.
	Tant que $S < \frac{99{,}9}{100} \times \frac{2}{3}$ faire
	    n prend la valeur $n+1$
	    a prend la valeur $\frac{4(\cos(\frac{n\pi}{2})-1)}{n^2\pi^2}$
	    S prend la valeur $S + \frac{a^2}{2}$
	Fin tant que

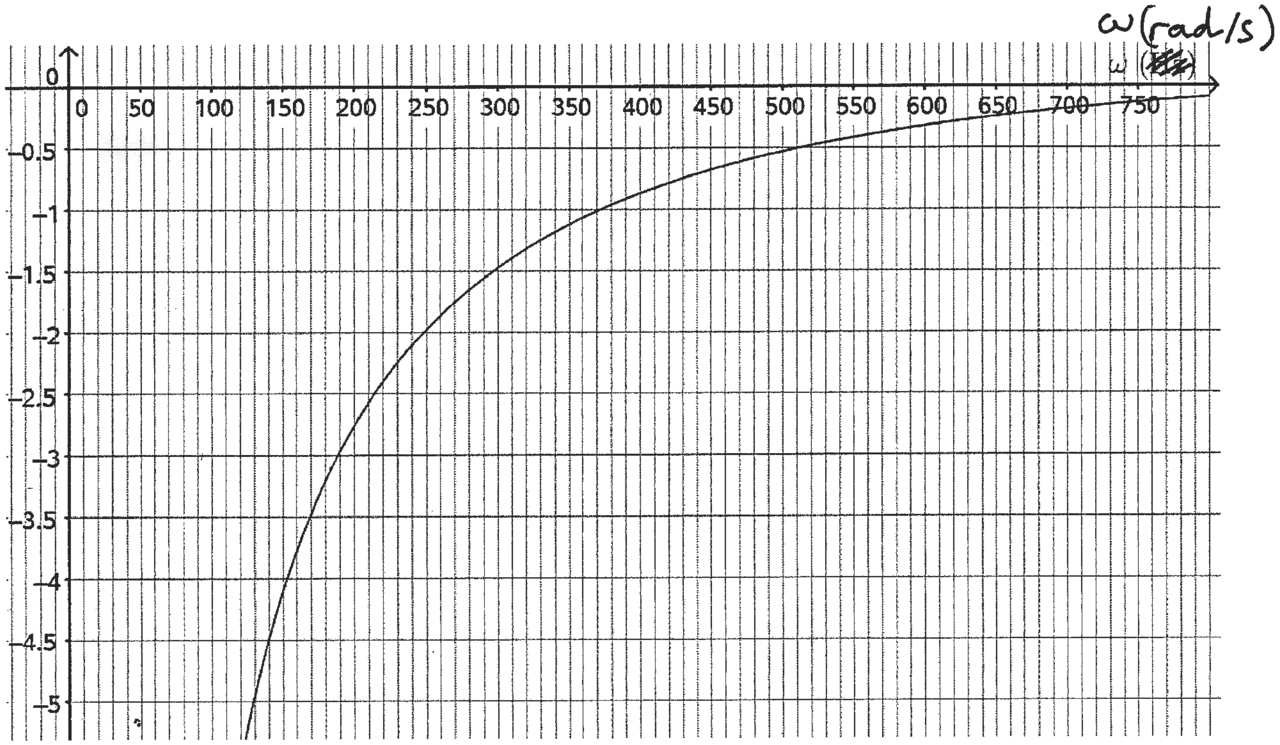
<u>**Sortie**</u>	Afficher n.

a) Quelle valeur de n affiche l'algorithme ? Justifier.

b) Que représente cette valeur pour le signal étudié ?

DOCUMENT REPONSE 1. À RENDRE AVEC LA COPIE

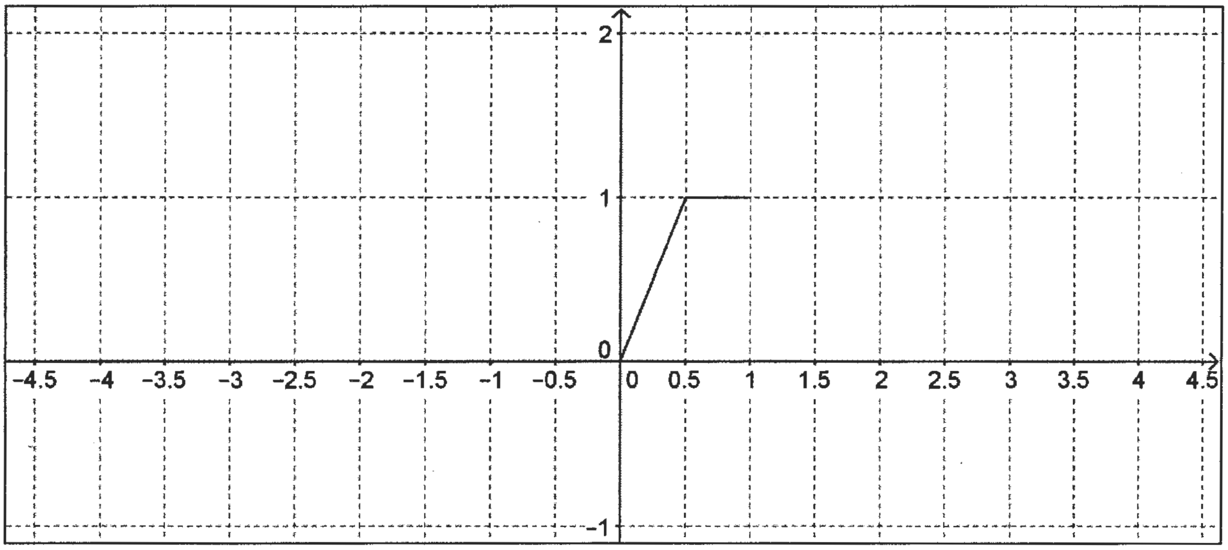
EXERCICE 1. Partie A : représentation graphique de la fonction G_1.



DOCUMENT REPONSE 2. À RENDRE AVEC LA COPIE

EXERCICE 2

Partie A Question 1)



Partie A Question 4) : copie d'écran de logiciel de calcul formel

Calcul formel

1	Intégrale[cos(n* π *t), t, 0, 1/2] $\rightarrow \dfrac{\sin\left(n\,\frac{\pi}{2}\right)}{n\,\pi}$
2	Intégrale[cos(n* π *t), t, 1/2, 1] $\rightarrow \dfrac{\sin(n\,\pi) - \sin\left(n\,\frac{\pi}{2}\right)}{n\,\pi}$
3	Intégrale[t*cos(n*π*t), t, 0, 1/2] $\rightarrow \dfrac{n\,\pi\,\sin\left(n\,\frac{\pi}{2}\right) + 2\,\cos\left(n\,\frac{\pi}{2}\right) - 2}{2\,n^2\,\pi^2}$
4	Intégrale[t*cos(n* π *t), t, 1/2, 1] $\rightarrow \dfrac{2\,n\,\pi\,\sin(n\,\pi) - n\,\pi\,\sin\left(n\,\frac{\pi}{2}\right) + 2\,\cos(n\,\pi) - 2\,\cos\left(n\,\frac{\pi}{2}\right)}{2\,n^2\,\pi^2}$