Corrigé de la fin du module 5 :

① **Prolongement** : Soit $a \in \mathbb{R}$, la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ de l'exponentielle au point d'abscisse a a pour équation :

$T_a : y = e^a(x-a)+e^a = e^a x - ae^a + e^a$

On cherche à connaître la position de $\mathcal{C}$ par rapport à T_a donc on étudie le signe de la différence
$h(x) = e^x - (e^a x - ae^a + e^a)$.

Pour étudier ce signe, on étudie les variations de h :

h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions qui le sont.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = e^x - e^a$ ⚠ a est une constante

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = e^a \Leftrightarrow x = a$

$h'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > e^a \Leftrightarrow x > a$.

d'où :

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de h		$\searrow$	0	$\nearrow$	

$h(a) = e^a - (e^a \times a - ae^a + e^a)$
$= e^a - e^a$
$= 0$.

Comme 0 est le minimum de h sur $\mathbb{R}$ atteint seulement en a, on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		a		$+\infty$
signe de $h(x)$		$+$	0	$+$	

On en déduit donc que :

- $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$, $h(x) > 0$ c.à.d. $e^x > e^a x - ae^a + e^a$
  donc $\mathcal{C}$ est au-dessus de T_a sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$
- si $x = a$ $h(x) = 0$ c.à.d. $e^x = e^a x - ae^a + e^a$
  donc $\mathcal{C}$ et T_a ont un seul point d'intersection, le point d'abscisse a.