Corrigé des exercices sur les complexes (TS)

- **Entraînement du module 9 (équations dans $\mathbb{C}$)**

n°24 p.286 a) $8z+5i = 4-z+i \iff 9z = 4-4i \iff z = \frac{4}{9}-\frac{4}{9}i$

$S = \left\{\frac{4}{9}-\frac{4}{9}i\right\}$

b) $2i+3z = i(5-iz) \iff 2i+3z = 5i+z$

$\iff 2z = 3i$

$\iff z = \frac{3}{2}i$ $\quad S = \left\{\frac{3}{2}i\right\}$

n°41 p.287 a) $z = 2\bar{z}$

(*) On pose $z = x+iy$ (x, y réels), $\bar{z} = x+iy$

$z = 2\bar{z} \iff x+iy = 2x+2iy \iff \begin{cases} x = 2x \\ y = 2y \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad S = \{0\}.$

b) $2z-4 = 5i+4\bar{z}$ (*) $\iff 2x+2iy-4 = 5i+4x-4iy$

$\iff (2x-4)+i(2y) = 4x+i(5-4y)$

$\iff \begin{cases} 2x-4 = 4x \\ 2y = 5-4y \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = -2 \\ y = \frac{5}{6} \end{cases} \quad S = \left\{-2+\frac{5}{6}i\right\}$

e) $z^2 = z\bar{z}$ (*) $\iff (x+iy)^2 = x^2+y^2$

$\iff x^2+2ixy-y^2 = x^2+y^2$

$\iff \begin{cases} x^2-y^2 = x^2+y^2 \\ 2xy = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \text{ ou } y = 0 \end{cases}$

$\iff y = 0 \quad S = \mathbb{R}.$

n°96 p.291

a) $z^2 = -1 \iff z = i$ ou $z = -i \quad S = \{i\,;-i\}$

b) $z^2 = -9 \iff z = 3i$ ou $z = -3i \quad S = \{3i\,;-3i\}$

c) $z^2-2z+4 = 0 \quad \Delta = (-2)^2-4\times1\times4 = -12 < 0$

donc l'équation a deux solutions complexes conjuguées :

$z_1 = \frac{2+i\sqrt{12}}{2} = 1+i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1-i\sqrt{3}$

$S = \{1+i\sqrt{3}\,;1-i\sqrt{3}\}$

d) $z^2 = z-1 \iff z^2-z+1 = 0$

$\Delta = (-1)^2-4\times1\times1 = -3 < 0$ donc l'équation a deux solutions complexes conjuguées :

$z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$S = \left\{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}.$

e) $z^2+4z = 5 \iff z^2+4z-5 = 0$

$\Delta = 4^2-4\times1\times(-5) = 36 > 0$

donc l'équation a deux solutions réelles

$z_1 = \frac{-4+6}{2} = 1$ et $z_2 = \frac{-4-6}{2} = -5 \quad S = \{-5\,;1\}$

f) $-2z^2+2z-1 = 0 \quad \Delta = 2^2-4\times(-2)\times(-1) = -4 < 0$

donc l'équation a deux solutions complexes conjuguées :

$z_1 = \frac{-2+i\sqrt{4}}{-4} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$ et $z_2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i \quad S = \left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\,;\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right\}.$

n° 100 p. 292.

1) On "voit" que 1 est une solution de (E) : $1^3 + 1^2 - 2 = 0$.

2) $(z-1)(az^2+bz+c) = az^3 + (b-a)z^2 + (c-b)z - c$

Pour tout z de $\mathbb{C}$,

$z^3 + z^2 + 0z - 2 = az^3 + (b-a)z^2 + (c-b)z - c$ si on pose

$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = 1 \\ c - b = 0 \\ -c = -2 \end{cases}$ c'est à dire $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 2 \end{cases}$

donc $z^3 + z^2 - 2 = (z-1)(z^2+2z+2)$.

3) $(E) \iff (z-1)(z^2+2z+2) = 0$

$\iff z = 1$ ou $z^2 + 2z + 2 = 0$.

- $z^2+2z+2 = 0$: $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 2 = -4 < 0$ donc l'équation a deux solutions complexes conjuguées

$z_1 = \dfrac{-2 + i\sqrt{4}}{2} = -1 + i$ et $z_2 = -1 - i$

$\mathcal{S} = \{1 ; -1+i ; -1-i\}$.