Module 14

Ex2 1°) Il semble que (u_n) converge vers 0 et que (u_n) soit décroissante.

2°) a) initialisation : $n = 0$

$u_0 = 3$ donc $u_0 > 0$

La propriété est vraie au rang 0.

• hérédité : supposons que, pour un rang $n \geqslant 0$, $u_n > 0$ et montrons que $u_{n+1} > 0$.

or $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{3+2u_n}$

Par hypothèse, $u_n > 0$ donc $3u_n > 0$ (car $3 > 0$)
et $3 + 2u_n > 0$ (car $3 > 0$ et $2 > 0$).

Donc $\underbrace{\dfrac{3u_n}{3+2u_n}}_{u_{n+1}} > 0$

La propriété est héréditaire.

Conclusion : Par le principe de récurrence, la propriété $u_n > 0$ est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

b) Remarque : (v_n) est bien définie sur $\mathbb{N}$ car $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \neq 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{3}{u_{n+1}} = 3 \times \dfrac{3+2u_n}{3u_n} = \dfrac{3}{u_n} + 2 = v_n + 2$

Donc (v_n) est arithmétique de raison 2.

$v_0 = \dfrac{3}{u_0} = \dfrac{3}{3} = 1$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 + n \times 2 = 1 + 2n$.

$v_n = \dfrac{3}{u_n} \Leftrightarrow u_n = \dfrac{3}{v_n}$ ($v_n \neq 0$ car $\dfrac{3}{u_n} \neq 0$).

donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = \dfrac{3}{2n+1}$.

3°) • $\lim\limits_{n \to +\infty} (2n+1) = +\infty$ $(2 > 0)$ donc par quotient $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

• $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{3}{2(n+1)+1} - \dfrac{3}{2n+1}$

$= \dfrac{3}{2n+3} - \dfrac{3}{2n+1}$

$= \dfrac{3(2n+1) - 3(2n+3)}{(2n+3)(2n+1)}$

$= \dfrac{-6}{(2n+3)(2n+1)}$

$\left.\begin{array}{l} -6 < 0 \\ (2n+3) > 0 \text{ et } (2n+1) > 0 \end{array}\right\}$ $u_{n+1} - u_n < 0$

Donc (u_n) est bien décroissante.