Exercices d'entraînement sur les limites de suites :

54 1) $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-2n) = -\infty$ car $-2<0$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(n^2+3) = +\infty$ par somme

donc, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 = 3$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 3+2n = +\infty$ car $2>0$

donc, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

55 1) $\lim\limits_{n\to+\infty} 4n-1 = +\infty$ car $4>0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{\sqrt{n}} = 0$ par quotient car $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n} = +\infty$.

donc, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^2 = -\infty$ car $-1<0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} -5n = -\infty$ car $-5<0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

donc, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

56 1) a) $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{-4n^2}{n} - \frac{3n}{n} + \frac{1}{n} = -4n-3+\frac{1}{n}$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}(-4n-3) = -\infty$ car $-4<0$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$

donc, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

2) $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n = n^2\left(5-\frac{3n}{n^2}+\frac{1}{n^2}\right) = n^2\left(5-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 5 = 5$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 3\times\frac{1}{n} = 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2} = 0$

donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(5-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = 5$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$

donc, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (car $5>0$)

57 1) $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n = n^3\left(4-\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 4 = 4$, $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{3}{n^2} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^3} = 0$

donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(4-\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right) = 4$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$, donc, par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (car $4>0$)

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{n^3\left(4-\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)}{n^2\left(1+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}\right)} = n\,\dfrac{4-\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{1+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(4-\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right) = 4$ (fait au 1°))

$\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{2}{n^2} = 0$ donc, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}\right) = 1$.

Donc, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4-\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{1+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}} = \frac{4}{1} = 4$.

Donc, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (car $4>0$).

58 1) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{n^2\left(4-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^3\left(1+\frac{3}{n^2}-\frac{2}{n^3}\right)} = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{1-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n^2}-\frac{2}{n^3}}$

En rédigeant comme au 2) du 57 on trouve :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{n^3\left(4-\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)}{n^3\left(1+\frac{3}{n^2}-\frac{2}{n^3}\right)} = \dfrac{4-\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{1+\frac{3}{n^2}-\frac{2}{n^3}}$

En rédigeant comme au 2) du 57, on trouve :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{4}{1} = 4$.

59 1) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{\sqrt{n}\left(1-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = \dfrac{1-\frac{2}{\sqrt{n}}}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ donc $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{2}{\sqrt{n}}\right) = 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1 \end{cases}$

Donc par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{1} = 1$.

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n\times\sqrt{n}\times\sqrt{n}} = \dfrac{1}{n\times\sqrt{n}}$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty \end{array}\right\}$ donc, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sqrt{n} = +\infty$

Donc, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

(60) 1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq (-1)^n \leq 1$

donc $\underbrace{3n^2 - 1 \leq 3n^2 + (-1)^n}$ $\underbrace{\leq 3n+1}_{\text{information inutile ici}}$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} (3n^2 - 1) = +\infty$ car $3 > 0$

donc par le théorème de comparaison $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

2) $\forall n \in \mathbb{N}$ $-1 \leq (-1)^n \leq 1$

donc $3n - 1 \leq 3n + (-1)^n \leq 3n+1$

donc $\dfrac{3n-1}{n+1} \leq u_n \leq \dfrac{3n+1}{n+1}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{3n-1}{n+1} = \dfrac{n\left(3 - \frac{1}{n}\right)}{n\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \dfrac{3 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}}$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, on a, par produit, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = 3$.

De même, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\dfrac{3n+1}{n+1} = \dfrac{n\left(3 + \frac{1}{n}\right)}{n\left(3 + \frac{1}{n}\right)} = \dfrac{3 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}}$

ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3n+1}{n+1} = 3$ (comme précédemment)

Donc, par le théorème d'encadrement $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$.

(62) 1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq \cos n \leq 1$

donc $1 \geq -\cos n \geq -1$

donc $\underbrace{n+1 \geq}_{\text{inutile ici}} \boxed{u_n \geq n-1}$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} (n-1) = +\infty$ donc, par le théorème de comparaison,

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

2) $\forall n \in \mathbb{N}$ $-1 \leq \sin n \leq 1$

donc $\underbrace{-n^2 - 1 \leq}_{\text{inutile ici}} \boxed{\quad \leq -n^2 + 1}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} (-n^2 + 1) = -\infty$ (car $-1 < 0$)

donc par le théorème de comparaison $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

(63) 1) $-\dfrac{15}{7} \leq -1$ donc (u_n) n'a pas de limite

2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{3 \times 4^n}{5 \times (4 \times 3)^n} = \dfrac{3 \times \cancel{4^n}}{5 \times \cancel{4^n} \times 3^n} = \dfrac{3}{5 \times 3^n}$

Comme $3>1$, $\lim_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} (5\times 3^n) = +\infty$
(5>0)

Donc par quotient, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

64 • $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{2^n}{3^n} - \frac{1}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n$

Comme $-1 < \frac{2}{3} < 1$ et $-1 < \frac{1}{3} < 1$, $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$.

Donc par somme, $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.

• $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = \frac{2^n}{3^n} + \frac{3^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n + 1$.

Comme $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ (ci-dessus), par somme,
$\lim_{n\to+\infty} w_n = 1$.