Corrigé de la fin du module 5

Exercice 2

1°) C : $g(x)^2 - f(x)^2 = 1$ FAUX

contre-exemple : $g(0)^2 - f(0)^2 = 0^2 - 1^2 = -1 \neq 1$.

D : $g(2x) = 2f(x)g(x)$ VRAI

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad 2f(x)g(x) = 2 \times \dfrac{(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})}{2 \times 2}$

$$= \frac{(e^x)^2 - (e^{-x})^2}{2}$$

$$= \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}$$

$$= g(2x).$$

2°) a) Il semble que la courbe de f soit symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

b) Il semble que f soit positive (strictement) sur $\mathbb{R}$ car C_f semble au-dessus de l'axe des abscisses sur $\mathbb{R}$.

Il semble que f soit strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

3°) • démonstration de la conjecture du a) : il s'agit de démontrer que deux points de C_f d'abscisses opposées ont la même ordonnée.

$\forall x \in \mathbb{R}$, soit $M(x\,;f(x))$ et $N(-x\,;f(-x))$

M et N sont deux points de C_f d'abscisses opposées.

Par 1°) affirmation A, $f(-x) = f(x)$ donc $y_N = y_M$

donc M et N sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Ceci étant vrai pour tout x de $\mathbb{R}$, C_f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

voir p. 78 ex 22

Rem : f est une fonction paire

De façon générale, la courbe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

• signe de f : $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$

Comme $2 > 0$, $f(x) > 0$.

• variations de f : f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de $x \mapsto \frac{1}{2}e^x$ et $x \mapsto \frac{1}{2}e^{-x}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ ($x \mapsto e^{-x}$ est la composée de $x \mapsto -x$ dérivable sur

$\mathbb{R}$ et de $x \mapsto e^{x}$).

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x} + (-1)e^{-x}\right) = \underbrace{\frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)}_{\text{c'est } g(x)!}$

$$
\begin{aligned}
f'(x) = 0 &\iff e^{x} - e^{-x} = 0 \\
&\iff e^{x} = e^{-x} \\
&\iff x = -x \\
&\iff x = 0 .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'(x) > 0 &\iff e^{x} > e^{-x} \\
&\iff x > -x \\
&\iff 2x > 0 \\
&\iff x > 0
\end{aligned}
$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f		$\searrow$	1	$\nearrow$	