Correction exercices sur les limites de suites :

TS3

23 p. 117

1°) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

a) $u_n \in]-0,1 ; 0,1[\iff -0,1 < u_n < 0,1$
$\iff \underbrace{-0,1 < \dfrac{1}{\sqrt{n}}}_{\text{vrai pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*} < 0,1$

⊖ ⊕

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{\sqrt{n}} < 0,1 \iff \sqrt{n} > \dfrac{1}{0,1}$ car $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$

$\iff \sqrt{n} > 10$

$\iff n > 100$ car $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Donc à partir du rang 101, u_n appartient à $]-0,1;0,1[$.

b) De même $u_n \in]-0,01;0,01[\iff \underbrace{-0,01 < \dfrac{1}{\sqrt{n}}}_{} < 0,01$

$\dfrac{1}{\sqrt{n}} < 0,01 \iff \sqrt{n} > \dfrac{1}{0,01} \iff n > 10000$ vrai pour tout n de $\mathbb{N}^*$

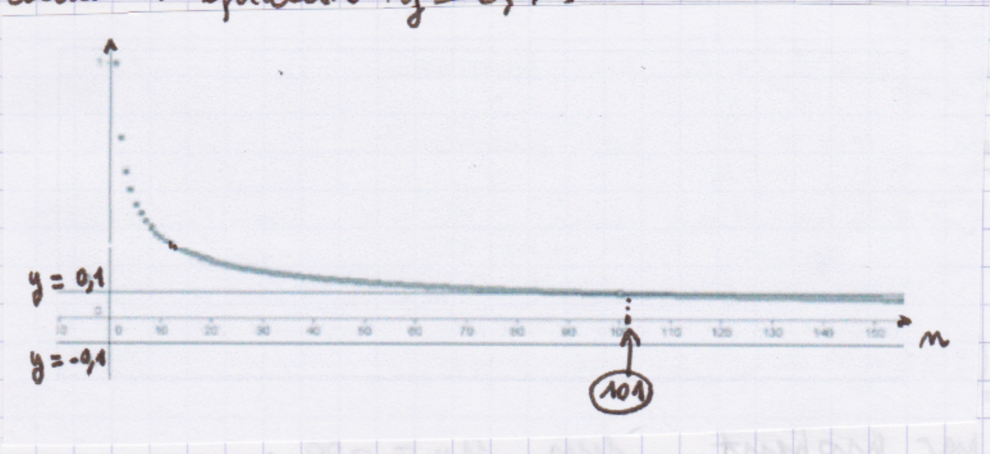
Donc à partir du rang 10001, u_n appartient à $]0,01;0,01[$

c) $u_n \in]-10^{-6};10^{-6}[\iff \underbrace{-10^{-6} < \dfrac{1}{\sqrt{n}}}_{\text{vrai pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*} < 10^{-6}$

$\dfrac{1}{\sqrt{n}} < 10^{-6} \iff \sqrt{n} > \dfrac{1}{10^{-6}} \iff \sqrt{n} > 10^6 \iff n > 10^{12}$

Donc à partir du rang $10^{12}+1$, u_n appartient à $]-10^{-6};10^{-6}[$.

2°) pour le a : A partir du rang 101, les points du nuage sont au dessus de la droite d'équation $y=-0,1$ et dessous de la droite d'équation $y=0,1$.



3°) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ en effet :

soit $\alpha > 0$, $u_n \in]-\alpha;\alpha[\iff \underbrace{-\alpha < \dfrac{1}{\sqrt{n}}}_{\text{vrai pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*} < \alpha$

$\dfrac{1}{\sqrt{n}} < \alpha \iff \sqrt{n} > \dfrac{1}{\alpha} \iff n > \left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^2$

donc pour tout n supérieur à n_0 (plus petit entier supérieur à $\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^2$)
$u_n \in]-\alpha;\alpha[$

Ceci étant vrai pour tout $\alpha > 0$, tout intervalle ouvert centré sur 0 contient tous les termes de (u_n) à partir d'un certain rang.

35 p. 118

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} 1{,}2^n = +\infty$ car $1{,}2 > 1$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} -e^n = -\infty$ car $e > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e^n = +\infty$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}99^n = 0$ car $-1 < 0{,}99 < 1$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ (référence) donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{3}{n^2} = 0$

e) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n = 0$ car $-1 < -\frac{2}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 4\left(-\frac{2}{3}\right)^n = 0$.

f) $2^{-n} = \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^{-n} = 0$ car $-1 < \frac{1}{2} < 1$

g) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $-\frac{1}{2} < 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{2}\sqrt{n} = -\infty$.

h) $\lim\limits_{n\to+\infty} -3^n = -\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty \text{ car } 3 > 1 \\ (-1) < 0. \end{cases}$

40 p. 118

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{1}{2} < 1$

donc, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

b) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} (2n+4) = +\infty \text{ car } 2 > 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 3 = 3 \end{array}\right\}$ donc, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

c) $u_n = \frac{3}{2 + e^{-n}} = \frac{3}{2 + \frac{1}{e^n}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} e^n = +\infty$ car $e > 1$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{e^n} = 0$ par quotient

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2 + \frac{1}{e^n}\right) = 2$ par somme

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{3}{2}$ par quotient

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{\sqrt{n}} = 0$ par quotient

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-1 + \frac{3}{\sqrt{n}}\right) = -1$

$\lim\limits_{n\to+\infty} (2n+4) = +\infty$ car $2 > 0$

donc, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.