/9 B

NOM :

INTERROGATION DE MATHÉMATIQUES N°6

1°) Enoncer la définition de : «La fonction f a pour limite -2 en $+\infty$».

On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle du type $]a;+\infty[$ $(a\in\mathbb{R})$ a pour limite -2 en $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant -2 contient tous les réels $f(x)$ pour x assez grand.

0,5

2°) Traduire en termes de limite la phrase suivante : « Tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$, où A est un réel, contient tous les réels f(x) pour x assez proche de 7 »

0,5 $\lim\limits_{x\to 7} f(x)=+\infty$

3°) Justifier que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. $\forall x\neq 0$ $\frac{\sin x}{x}=\frac{\sin x-\sin 0}{x-0}$ ← taux de variation de $x\mapsto \sin x$ en 0

Comme sin est dérivable en 0, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin 0}{x-0}=\sin'(0)=\cos 0=1$.

1 Donc $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

4°) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x+5}{1-x^2}$ et interpréter graphiquement le résultat.

$\forall x<-1$ $\frac{2x+5}{1-x^2}=\frac{x(2+\frac{5}{x})}{x^2(\frac{1}{x^2}-1)}=\frac{1}{x}\frac{(2+\frac{5}{x})}{(\frac{1}{x^2}-1)}$ or $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$

1 donc $\lim\limits_{x\to-\infty}(2+\frac{5}{x})=2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(\frac{1}{x^2}-1)=-1$ donc par produit et produit, on a : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x+5}{1-x^2}=0$. Donc la droite d'équation $y=0$ est asymptote à la courbe de la fonction en $-\infty$

+ 0,5

5°) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}-x$.

$\forall x>0$ $\sqrt{x}-x=x(\frac{\sqrt{x}}{x}-1)=x(\frac{1}{\sqrt{x}}-1)$

1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{1}{\sqrt{x}}-1)=\underbrace{-1}_{<0}$ donc, par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty}x(\frac{1}{\sqrt{x}}-1)=-\infty$

6°) Montrer que la courbe représentative de h: $x\mapsto\frac{x}{6x-2}$ admet une asymptote parallèle à l'axe des ordonnées.

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}x=\underbrace{\frac{1}{3}}_{>0}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{3}\\ x<\frac{1}{3}}}(6x-2)=0^-$ $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{3}\\ x>\frac{1}{3}}}(6x-2)=0^+$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$6x-2$	$-$	0	$+$

1 donc, par produit, $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{3}\\ x<\frac{1}{3}}}h(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{3}\\ x>\frac{1}{3}}}h(x)=+\infty$. Donc $\mathcal{D}: x=\frac{1}{3}$ est une asymptote à $\mathcal{C}_h$.

7°) a) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+4}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+4)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ donc par composition

1 $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+4}=+\infty$.

b) Soit (u_n) la suite définie pour tout $n\geq 1$ par $u_n=\sin(\frac{\pi}{n^2})$. Déterminer la limite de (u_n).

$n\longmapsto\frac{\pi}{n^2}\xrightarrow{\sin}\sin(\frac{\pi}{n^2})$

1 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\pi}{n^2}=0$ et $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$ donc par composition $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

8°) On cherche à déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x^2}$.

a) Quel théorème de cours utilise-t-on ?

On utilise le théorème d'encadrement

b) Déterminer cette limite.

$\forall x\in\mathbb{R}$ $-1\leq\cos x\leq 1$

1,5 donc $\forall x\neq 0$ $-\frac{1}{x^2}\leq\frac{\cos x}{x^2}\leq\frac{1}{x^2}$ (car $x^2>0$)

or $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{1}{x^2}=0$ donc par le théorème d'encadrement, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x^2}=0$.

NOM : /9 A

INTERROGATION DE MATHÉMATIQUES N°6

1°) Enoncer la définition de : «La fonction f a pour limite 7 en $+\infty$ ».

On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle du type $]a;+\infty[$ $(a\in\mathbb{R})$ a pour limite 7 en $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant 7 contient tous les réels $f(x)$ pour x assez grand.

0,5

2°) Traduire en termes de limite la phrase suivante : « Tout intervalle de la forme $]-\infty\,;A[$, où A est un réel, contient tous les réels $f(x)$ pour x assez proche de -3 »

0,5 $\lim\limits_{x\to -3} f(x) = -\infty$.

3°) Justifier que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

$\forall x\neq 0$ $\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin x - \sin 0}{x-0}$ ← taux de variation de $x\mapsto \sin x$ en 0

Comme sin est dérivable en 0, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - \sin 0}{x-0} = \sin'(0) = \cos 0 = 1$.

1 Donc $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

4°) Déterminer $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{2x^2+5}{1-x^2}$ et interpréter graphiquement le résultat.

$\forall x<-1$, $\frac{2x^2+5}{1-x^2} = \frac{x^2\left(2+\frac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(\frac{1}{x^2}-1\right)} = \frac{2+\frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x^2}-1}$ or $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{1}{x^2} = 0$

1 donc $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(2+\frac{5}{x^2}\right) = 2$ et $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{1}{x^2}-1\right) = -1$ par somme et produit

\+ donc $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{2x^2+5}{1-x^2} = -2$ par quotient. Donc la droite d'équation $y=-2$ est asymptote à la courbe de cette fonction en $-\infty$.

0,5

5°) Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x} - x$.

$\forall x>0$ $\sqrt{x} - x = x\left(\frac{\sqrt{x}}{x} - 1\right) = x\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)$

1 $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right) = -1$ donc par produit $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right) = -\infty$

6°) Montrer que la courbe représentative de h: $x \mapsto \frac{x}{5-2x}$ admet une asymptote parallèle à l'axe des ordonnées.

$\lim\limits_{x\to \frac{5}{2}} x = \frac{5}{2} > 0$

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$5-2x$	$+$	0	$-$

1 $\lim\limits_{\substack{x\to \frac{5}{2}\\ x>\frac{5}{2}}} (5-2x) = 0^-$ et $\lim\limits_{\substack{x\to \frac{5}{2}\\ x<\frac{5}{2}}} (5-2x) = 0^+$

donc par quotient $\lim\limits_{\substack{x\to \frac{5}{2}\\ x>\frac{5}{2}}} h(x) = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to \frac{5}{2}\\ x<\frac{5}{2}}} h(x) = +\infty$

Donc la droite $\mathcal{D} : x = \frac{5}{2}$ est asymptote à $\mathcal{C}_h$.

7°) a) Déterminer $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+1}$.

$\lim\limits_{x\to -\infty} (x^2+1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x} = +\infty$ donc par composition,

1 $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{x^2+1} = +\infty$

b) Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \geq 1$ par $u_n = \cos\left(\frac{\pi}{n^2}\right)$. Déterminer la limite de (u_n).

$n \longmapsto \frac{\pi}{n^2} \xmapsto{\cos} \cos\left(\frac{\pi}{n^2}\right)$

1 $\lim\limits_{n\to +\infty}\frac{\pi}{n^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$ donc par composition $\lim\limits_{n\to +\infty} u_n = 1$

8°) On cherche à déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sin x + x^2)$.

a) Quel théorème de cours utilise-t-on ?

On utilise le théorème de comparaison

b) Déterminer cette limite.

1,5 $\forall x\in\mathbb{R}$ $-1 \leq \sin x \leq 1$ donc $-1+x^2 \leq \sin x + x^2$ $(\leq 1+x^2$ inutile ici$)$

or $\lim\limits_{x\to +\infty}(-1+x^2) = +\infty$ donc par le th. de comparaison

$\lim\limits_{x\to +\infty}(\sin x + x^2) = +\infty$