NOM : Sujet B

INTERROGATION DE MATHÉMATIQUES N°2

Dérivation

Les trois questions sont indépendantes

1°) Soit v une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Donner l'expression de la dérivée des fonctions f et g définies par :

$f(x) = v(5-7x)$ $\qquad$ $g(x) = v(-x)$

$f'(x) = -7v'(5-7x)$

$g'(x) = (-1)v'(-x) = -v'(-x)$

1

2°) u est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

a) A quelle(s) condition(s) peut-on affirmer que la fonction composée $\sqrt{u}$ est-elle dérivable sur I ?

- u dérivable sur I
- u strictement positive sur I

0,5

b) Quelle formule de dérivation utilise-t-on pour dériver $\sqrt{u}$?

$(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ 0,25

3°) Soient $h : x \mapsto (4-x^2)^5$ et $k : x \mapsto (4-x^2)^{-5}$

a) Parmi les intervalles proposés choisir ceux sur lesquels k est dérivable en justifiant.

$\mathbb{R}$ $\quad$ $[-2;2]$ $\quad$ $]-2;2[$ $\quad$ $]-\infty;-2[$ $\quad$ $]2;+\infty[$ $\quad$ $]-\infty;-2]$ $\quad$ $[2;+\infty[$

$k(x) = \dfrac{1}{(4-x^2)^5}$ $\qquad$ $k(x)$ existe $\Leftrightarrow 4-x^2 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq 2$ et $x \neq -2$

donc k est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2;2\}$

elle est donc dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-2;2\}$.

1,25

b) En supposant que la fonction u remplisse les conditions de dérivabilité, donner les formules permettant de calculer la dérivée de u^5 et de u^{-5}

$(u^5)' = 5u'u^4$ $\qquad$ $(u^{-5})' = (-5)u'u^{-6}$ 0,5

c) Donner l'expression des dérivées respectives de h et k.

$h'(x) = 5 \times (-2x)(4-x^2)^4 = -10x(4-x^2)^4$

$k'(x) = (-5) \times (-2x)(4-x^2)^{-6} = 10x(4-x^2)^{-6}$

0,5

4

Récurrence:
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 1$.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier n de $\mathbb{N}$, $u_n \geq n + 1$.

On fera apparaître clairement les étapes de la démonstration que l'on rédigera soigneusement

Montrons par récurrence que pour tout $\underbrace{n \text{ de } \mathbb{N}}_{n_0 = 0}$,
$u_n \geqslant n+1$ $\mathcal{P}(n)$

. Initialisation : $n = 0$
$u_0 = 1$
$0 + 1 = 1$ } $u_0 \geqslant 0 + 1$ donc la propriété est vraie au rang 0.

. Hérédité : supposons que, pour un rang $n \geqslant 0$,
$u_n \geqslant n+1$ si $\mathcal{P}(n)$ est vraie
et montrons alors que $u_{n+1} \geqslant n+2$
$\mathcal{P}(n+1)$ vraie ?

or $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 1$
Par hyp. de récurrence $u_n \geqq n+1$
donc $u_{n+1} \geqslant 3(n+1) - 2n + 1$ (car $3>0$)
donc $u_{n+1} \geqslant 3n + 3 - 2n + 1$
donc $u_{n+1} \geqslant n + 4$
Comme $n+4 \geqslant n+2$, on a bien $u_{n+1} \geqslant n+2$.
Donc la propriété est héréditaire

. Conclusion : Par le principe de récurrence, la propriété $u_n \geqslant n+1$ est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$

plan : 1,5
initialisation : 0,5
hérédité : 1

3