NOM : Sujet A

INTERROGATION DE MATHÉMATIQUES N°2

Dérivation

Les trois questions sont indépendantes

1°) u est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

a) A quelle(s) condition(s) peut-on affirmer que la fonction composée $\sqrt{u}$ est dérivable sur I ?

- u est dérivable sur I
- u est strictement positive sur I

0,5

b) Quelle formule de dérivation utilise-t-on pour dériver $\sqrt{u}$?

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

0,25

2°) Soient f $x \mapsto (9-x^2)^4$ et h : $x \mapsto (9-x^2)^{-4}$

a) Parmi les intervalles proposés choisir ceux sur lesquels **h** est dérivable en justifiant.

$\mathbb{R}$ [-3;3]]-3;3[ ]-∞;-3] [3; +∞[ ]-∞;-3[ ]3;+∞[

$h(x) = \frac{1}{(9-x^2)^4}$ h(x) existe $\Leftrightarrow 9-x^2 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq 3$ et $x \neq -3$

donc h est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3;3\}$

elle est donc dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-3;3\}$.

1,25

b) En supposant que la fonction u remplisse les conditions de dérivabilité, donner les formules permettant de calculer la dérivée de u^4 et de u^{-4}

$(u^4)' = 4u'u^3$

$(u^{-4})' = (-4)u'u^{-5}$

0,5

c) Donner l'expression des dérivées respectives de f et h.

$f'(x) = 4 \times (-2x)(9-x^2)^3 = -8x(9-x^2)^3$

$h'(x) = (-4)(-2x)(9-x^2)^{-5} = 8x(9-x^2)^{-5}$

0,5

3°) Soit v une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Donner l'expression de la dérivée des fonctions w et k définies par :

$w(x) = v(-x)$ $k(x) = v(2+3x)$

$w'(x) = (-1)v'(-x) = -v'(-x)$

$k'(x) = 3v'(2+3x)$

1

4

Récurrence:
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n - n + 1$.
Démontrer par récurrence que pour tout entier n de $\mathbb{N}$, $u_n \geq n + 1$.

On fera apparaître clairement les étapes de la démonstration que l'on rédigera soigneusement

Montrons par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $n_0 = 0$
$u_n \geqslant n+1$. $P(n)$

- Initialisation : $n = 0$

$u_0 = 1$, $0+1 = 1$ donc $u_0 \geqslant 0+1$
donc la propriété est vraie au rang 0.

- Hérédité : supposons que pour un rang $n \geqslant 0$
$u_n \geqslant n+1$ si $P(n)$ est vraie
et montrons alors que $u_{n+1} \geqslant n+2$ $P(n+1)$ vraie ?

or $u_{n+1} = 2u_n - n + 1$
Par hypothèse de récurrence, $u_n \geqslant n+1$
donc $u_{n+1} \geqslant 2(n+1) - n + 1$ (car $2>0$)
donc $u_{n+1} \geqslant 2n+2-n+1$
donc $u_{n+1} \geqslant n+3$
Comme $n+3 \geqslant n+2$, on a bien $u_{n+1} \geqslant n+2$
Donc la propriété est héréditaire

- Conclusion : Par le principe de récurrence, la propriété $u_n \geqslant n+1$ est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

3
plan : 1,5
initialisation : 0,5
hérédité : 1