

# Correction des exercices d'entraînement sur les dérivées

(R3)

- 10) b)  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme inverse de  $x \mapsto x^2 + 5$ , fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  (car fonction polynôme) ne s'annulant pas sur  $\mathbb{R}$  (pour tout réel  $x$ ,  $x^2 + 5 > 0$ ).

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+5)^2} \quad \leftarrow \text{formule utilisée}$$

- c)  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  comme fonction rationnelle définie sur  $\mathbb{R}^* = ]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$ .

$$\forall x \neq 0 \quad f'(x) = \frac{7 \times 5x - (7x-24) \times 5}{(5x)^2} = \frac{24 \times 5}{5 \times 5x^2} = \frac{24}{5x^2}$$

- d)  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$  comme fonction rationnelle définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1\} = ]-\infty; -1[ \cup ]-1; +\infty[$ .

$$\forall x \neq -1 \quad f'(x) = -\frac{1 \times (x+1) - x \times 1}{(x+1)^2} = -\frac{1}{(x+1)^2}$$

- e)  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  comme inverse de  $x \mapsto \sqrt{x}$  dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , ne s'annulant pas sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

$$\forall x > 0 \quad f'(x) = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

- i bis)  $x \mapsto \frac{-3}{8-2x}$  est dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{4\}$  comme fonction rationnelle définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{4\}$  donc  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{4\}$  comme somme de fonctions qui le sont.

$$\forall x \neq 4 \quad f'(x) = 0 - 3 \times \left( -\frac{-2}{(8-2x)^2} \right) = -\frac{6}{(8-2x)^2}$$

$$f(x) = 2 - 3 \times \frac{1}{8-2x}$$

- f)  $x \mapsto x^2 - \frac{5}{x}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  comme somme de fonctions qui le sont donc  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  comme produit de fonctions qui le sont ( $x \mapsto 3x$  est une fonction affine donc est dérivable sur  $\mathbb{R}$  donc sur  $\mathbb{R}^*$ ).

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = 3 \left( x^3 - \frac{5}{x} \right) + 3x \left( 3x^2 + \frac{5}{x^2} \right) = 12x^3$$

- g)  $\Delta$   $f$  n'est pas une fonction rationnelle car  $x \mapsto 2\sqrt{x} + 3$  n'est pas une fonction polynôme.

$x \mapsto 2\sqrt{x} + 3$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  car  $x \mapsto \sqrt{x}$  l'est  
 $x \mapsto x+2$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  (fonction affine) donc sur  $\mathbb{R}_+^*$

De plus, pour tout  $x > 0$ ,  $x+2 \neq 0$ .

Donc  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$

$$\forall x > 0, f'(x) = \frac{\frac{2}{2\sqrt{x}} \times (x+2) - (2\sqrt{x}+3) \times 1}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x} - 3}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{2 - x - 3\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+2)^2}$$

$$\forall x > 0 \quad \frac{x}{\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$$

h)  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  comme fonction rationnelle définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

$$\forall x \neq 1 \quad f'(x) = \frac{(2x-3)(1-x) - (x^2-3x+6) \times (-1)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{-x^2 + 2x + 3}{(1-x)^2}$$

← dérivée de  $\left(\frac{u}{v}\right)$

i)  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme fonction rationnelle définie sur  $\mathbb{R}$  (le trinôme  $x^2+x+1$  n'a pas de racine car son discriminant est égal à  $-3 < 0$ ).

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{(4x+3)(x^2+x+1) - (2x^2+3x-8)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$$

$$= \frac{-x^2 + 20x + 11}{(x^2+x+1)^2}$$

← dérivée de  $\left(\frac{u}{v}\right)$

2°) b)  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-5\} \quad \begin{matrix} -6 < 0 \\ (x+5)^2 > 0 \end{matrix} \Rightarrow f'(x) < 0$

|         |           |             |           |
|---------|-----------|-------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-5$        | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $-$       | $\parallel$ | $-$       |

c)  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\} \quad \begin{matrix} (2x+1)^2 > 0 \\ \frac{3}{(2x+1)^2} > 0 \end{matrix} \Rightarrow \frac{3}{(2x+1)^2} > 0$   
 $x > 0$  donc  $1 + \frac{3}{(2x+1)^2} > 0$

|         |           |                |           |
|---------|-----------|----------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $+$       | $\parallel$    | $+$       |

d)  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-5\} \quad f'(x) = \frac{(x+5)^2 - 6}{(x+5)^2} = \frac{x^2 + 10x + 19}{(x+5)^2}$

$\forall x \neq -5, (x+5)^2 > 0$  donc  $f'(x)$  est du signe de  $x^2 + 10x + 19$ .

Signe du trinôme :  $\Delta = 10^2 - 4 \times 1 \times 19 = 24$

$\Delta > 0 \Rightarrow$  le trinôme a deux racines  $x_1 = \frac{-10 + 2\sqrt{6}}{2} = -5 + \sqrt{6}$   
 et  $x_2 = -5 - \sqrt{6}$ .

Comme le coefficient de  $x^2$  est strictement positif, on a :

|                  |           |                 |      |                 |           |
|------------------|-----------|-----------------|------|-----------------|-----------|
| $x$              | $-\infty$ | $-5 - \sqrt{6}$ | $-5$ | $-5 + \sqrt{6}$ | $+\infty$ |
| $x^2 + 10x + 19$ | $+$       | $0$             | $-$  | $0$             | $+$       |
| $f'(x)$          | $+$       | $0$             | $-$  | $0$             | $+$       |

e)  $\forall x > 0, \left. \begin{array}{l} -\frac{1}{x^2} < 0 \\ -5\sqrt{x} < 0 \\ -1 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(x) < 0$  Somme de réels strictement négatifs

|         |   |           |
|---------|---|-----------|
| $x$     | 0 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |   | -         |

f)  $\forall x \neq 4, (x-4)^2 > 0$  donc  $f'(x)$  est du signe de  $1-x^2$   
 $1-x^2$  est un trinôme de racines  $-1$  et  $1$  avec un coefficient de  $x^2$  strictement négatif donc:

|         |           |      |   |     |     |           |
|---------|-----------|------|---|-----|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ |   | $1$ | $4$ | $+\infty$ |
| $1-x^2$ | -         | o    | + | o   | -   | -         |
| $f'(x)$ | -         | o    | + | o   | -   | -         |

g)  $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = x(x^2 + 5x + 7)$

Signe de  $x^2 + 5x + 7$ :  $\Delta = 25 - 4 \times 7 = -3 < 0$  donc, le trinôme n'a pas de racine et est du signe du coefficient de  $x^2$  sur  $\mathbb{R}$ .

|                |           |   |           |
|----------------|-----------|---|-----------|
| $x$            | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
| $x$            | -         | o | +         |
| $x^2 + 5x + 7$ | -         | + | +         |
| $f'(x)$        | -         | o | +         |

h)  $\forall x \neq -5, f'(x) = \frac{x(x+5)^2 - 25x}{(x+5)^2}$   

$$= \frac{x^3 + 10x^2 + 25x - 25x}{(x+5)^2}$$
  

$$= \frac{x^2(x+10)}{(x+5)^2}$$

$\forall x \neq -5, (x+5)^2 > 0$  donc  $f'(x)$  est du signe de  $x^2(x+10)$

|             |           |       |      |   |           |
|-------------|-----------|-------|------|---|-----------|
| $x$         | $-\infty$ | $-10$ | $-5$ | 0 | $+\infty$ |
| $x^2$       | +         |       | +    | o | +         |
| $x+10$      | -         | o     | +    |   | +         |
| $x^2(x+10)$ | -         | o     | +    | o | +         |
| $f'(x)$     | -         | o     | +    | o | +         |